昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2012年9月1日発行　第50巻9号　毎月1回1日発行
ISSN 0386―2240

数理科学

9
2012

特集

ハイゼンベルク

対話と討論が生み出した現代物理の礎



No.591

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 591 September 2012

ハイゼンベルク

対話と討論が生み出した現代物理の礎

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は１年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2009 年/5 省略

- 2009 年/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
- /7 現代物理の世界像
- /8 複素数
- /9 シュレーディンガー
- /10 数学と物理に広がる不変量
- 別冊 量子重力理論
- /11 可積分系の世界
- /12《原理》の探求
- 2010 年/1 無限次元の魅力
- /2 数学の可視化
- /3 物理数学の効用
- /4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
- 別冊 現代幾何学の発展
- /5 物理学事始め
- /6 現代幾何と方程式
- /7 物理学と行列
- /8 力の統一にむけて
- /9 南部陽一郎
- /10 曲面の不思議
- /11 連続から離散へ
- /12 物理における《破れ》と調和
- 2011 年/1 数論の探求
- /2 物理現象を読み解く数学的手法
- /3 方程式と現代代数学
- /4 物理学と多様体
- /5 初学者を悩ます数理の概念
- /6 物理イメージと数式表現
- /7 〈隠れた〉物理法則
- /8 計算が拓く数学と物理の世界
- /9 オイラー
- /10 時空と熱力学
- /11 線形から非線形へ
- /12 物理と仮説
- 2012 年/1 数学から物理へ，物理から数学へ
- /2 古典のススメ［物理編］
- /3 量子を操る
- /4 量子力学の数学的技法
- /5 解析学と物理学
- /6 面白い発想［物理編］
- /7 数学と物理における格子
- /8 導来圏をめぐって

数理科学臨時別冊一覧

- 11 年/10 実例で学ぶ 精度保証付き数値計算
- 11 年/11 リーマン予想の数理物理
- 11 年/12 量子多体系の物理
- 12 年/1 現象から方程式を創り出す
- 12 年/3 演習形式で学ぶリー群・リー環
- 12 年/4 弦理論の代数的基礎
- 12 年/5 アインシュタイン方程式
- 12 年/6 CP 対称性の破れ
- 12 年/7 弦の場の理論

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
丸善多摩センター店
ジュンク堂書店吉祥寺店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
丸善津田沼店
ジュンク堂書店（新潟）
ジュンク堂甲府岡島店
ジュンク堂新静岡店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都 BAL 店
ジュンク堂書店三宮店
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
丸善博多店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
ジュンク堂書店旭川店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
ジュンク堂書店郡山店
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北１店）
九州大学（理系）

September 2012 MATHEMATICAL SCIENCES Number 591

特集／ハイゼンベルク

巻頭言

ヘルゴランド島の黎明

山崎　和夫

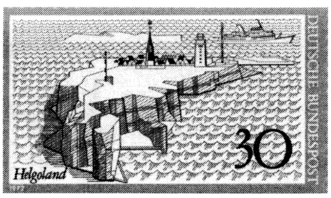
1. はじめに

ハイゼンベルク（W. Heisenberg）の思想的自伝『部分と全体』の序文の中で湯川秀樹先生は「科学者の自伝の中でこの本はユニークな地位を占めることになるであろう．…(略)…二十世紀の初期は物理学の英雄の時代であった．ハイゼンベルクは，英雄の一人として登場した．知的世界における英雄は単なる専門家ではなく，多かれ少なかれ思想家でもあった．彼と同年配の天才たち…(略)…と比べても，その息の長さにおいても，また新しい局面を迎えて，その都度，当面する根本問題を解決しようとする気概においても，群を抜いている．それはまた彼が，一貫して理論物理学を哲学と不可分のものと考えてきたこととも関係している．」と書かれている．上に記された英雄または天才達の中で，アインシュタイン（A. Einstein），シュレーディンガー（E. Schrödinger），ディラック（P.A.M. Dirac）…達は孤高の天才であったのに対してボーア（N. Bohr），ハイゼンベルク，パウリ（W. Pauli）…達は対話型の天才であった．

事実ハイゼンベルクはその自伝の「序」の書き出しで，「科学は人間によってつくられるものであります．…(略)…このことをもう一度思い返すならば，…(略)…人文科学–芸術と，技術–自然科学という二つの文化の間にある断絶を少なくすることに役立つのではないでしょうか．…(略)…この本を通じて，科学は討論の中から生まれるものであると言うことを，はっきりさせたいと望んでいます．」と書いている．

2. 量子論から量子力学へ——ハイゼンベルクの飛躍

さて 1900 年のプランク（M. Planck）から始まってアインシュタイン，ボーア，ゾンマーフェルト（A. Sommerfeld）と発展してきた（前期）量子論は 1924 年頃深刻な行き詰まりの状態にあった．それは水素原子ではうまくそのスペクトルを説明できたが，次のヘリウムではうまく行かない上に，原子内の電子の軌道も何故か奇妙な矛盾した性質を示していた．そこで原子内の電子の軌道でなく，観測可能な量のみから理論を構築しよう



ドイツの切手に描かれているヘルゴランド島．



ヘルゴランド島の岩塔.

という本格的な量子力学への決定的な第一歩は，1925年6月中旬，当時23歳の若いゲッチンゲン大学講師であったハイゼンベルクによって踏み出された．その頃ひどい枯草熱（現代の花粉症）に悩まされた彼は，草の生えていない北海の岩島ヘルゴランド島へ，公休を取って緊急避難したのであった．その地であらゆる仕事や義務や雑用から解放され，海風によって枯草熱を癒され，手掛けていた問題の解決に集中できた．2週間足らずの滞在の終わり頃行列を知らなかった彼が，行列の積や行列の積の順序交換に相当する複雑な計算を何とかやり遂げ，そのやり方でエネルギーが保存することを確かめて，その処方の正しさに確信を持てたのが午前3時．夜明けは近かった*1)．興奮してとても眠ってなどいられなくて，島の南端にあった海に突き出した岩塔によじ登り*2)そこで間もなく日の出を迎えた．今や自らの発見に確信を持てた彼が，これからの新理論の果たすべきすばらしい展望を夢見たとき，ほとんどめまいを覚えたほどで，そして幸福だったという．後日彼はそのときのことを，「神の肩越しにその御業（みわざ）をのぞき見ることを許された思い」と表現している．彼はその歴史的一日のことを「終日，一睡もしなかった．三分の一は量子力学の計算をして過ごし，三



ハイゼンベルクの生誕百年記念切手．10枚綴りの欄外には年が記載されており，これは業績を上げた年やノーベル賞等の受賞年，役職歴等に対応している（切手のうち，1枚を拙著コラムに掲載）．

分の一は岩山をあちこちよじ登り，残る三分の一はゲーテの“西東詩集”の詩を暗唱して過ごした．」と語っている．

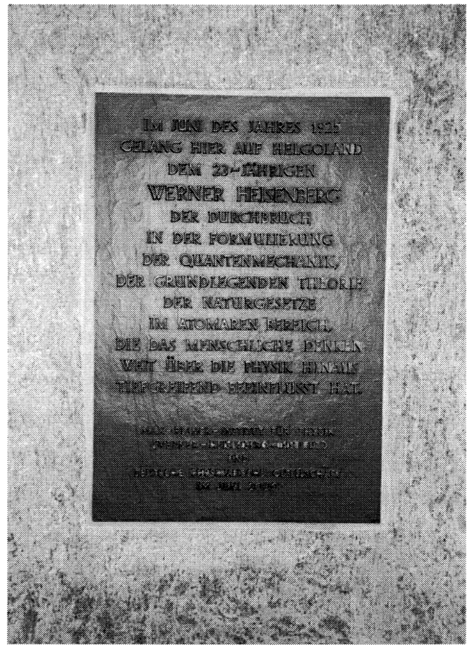
3. 量子力学（行列形式）の展開

ゲッチンゲンへの帰路，当時ハンブルグにいた盟友パウリを訪ねてその新発見の話をしたとき，いつもは批判的なパウリが珍しく，その方向へ更に進めるよう励ましてくれて，ハイゼンベルクは大いに自信を深めた．ゲッチンゲンへ帰ってその話を教授のボルン（M. Born）にすると，行列を知っていたボルンは，すぐにハイゼンベルクのしたことは行列の計算であったことを見抜いた．そこで開始されたボルン，ハイゼンベルク，ヨルダン（P. Jordan）のゲッチンゲンの三人衆のいわゆる行列力学が，直ちにしばらくの間理論物理学の世界を風靡した．その様子はこの力学に批判的であったアインシュタインに驚き騒ぐ鶏小屋を連想させたようで，友人のエーレンフェスト（P. Ehrenfest）に1925年9月に書いた手紙の中で「ハイゼンベルクが，でっかい量子卵を産み落とした」と書いている．しかしハイゼンベルクは終生行列力学という言葉を嫌い自（みずか）らは決して使わなかった．行列を使ったことが新理論の本質ではなく，自分は量子力学を創始したのだ，と．行列は当時の物理学者にはなじめない人々が多かったので，翌1926

*1) 6月で北緯64度にあるヘルゴランド島の夜明けは早い．

*2) このとき彼が這い登ったのは多分メンヒ（修道士）と呼ばれていたものと思われている．第2次世界大戦でドイツ軍の潜水艦Uボートの基地となっていたヘルゴランド島は連合国軍の猛爆撃と戦後の破壊によりその形を変えたと言われ，岩塔メンヒは隣の岩塔ホイショルンと共に完全に破壊されて現存しない．彼はその頃は本格的なアルピニストでもあった．





ヘルゴランド島にあるヴェルナー・ハイゼンベルクによる量子力学発見 75 周年の記念碑．マックス・プランク物理学研究所（ヴェルナー・ハイゼンベルク研究所）とドイツ物理学会が 2000 年 6 月に建てたものである．記念碑には「1925 年 6 月，このヘルゴランドで 23 歳のヴェルナー・ハイゼンベルクが量子力学の定式化への突破に成功した．量子力学は原子領域における自然法則の基礎理論であり，それは物理学をはるかに越えた人類の思考に深遠な影響を与えた．」（筆者訳）とある．

年早々に出現したシュレーディンガーの波動力学にその座を奪われた．こちらの方は微分方程式という物理学者の扱いなれた数学を用いていたからでもあった．いわゆる行列力学と波動力学の関連その他については次稿以下で詳しい説明があるだろう．

4. 以後のハイゼンベルクの活躍

その後の彼の活躍はめざましく，先ず 1927 年に 25 歳で（彼は 1901 年 12 月生まれ）ライプチッヒ大学正教授となり，ドイツで最年少の教授とマスコミに騒がれ，自分より年長の大学院生を指導した．その後の彼の学問的業績は，次稿以下で詳しく紹介されているが，不確定性原理の発見（1927），強磁性体の理論（量子力学的現代物性物理学の創始）(1928)，場の量子論（パウリとの共著）(1929)，原子核構造論（原子核は陽子と中性子で構成されているという発見されたばかりの中性子を用いての説明）(1932)，素粒子論における最小の長さと量子場の理論の適用限界の考察（1938），S 行列の理論（1943），中間子の多重発生の理論（1948），素粒子の統一場理論（1958）等々，そのどれをとってみても物理学を志すものなら，一生にその一つでも達成できれば大いに満足できるほどの仕事である．1933 年に 1932 年度のノーベル物理学賞を単独で受賞した．勿論その他の受賞等は数え切れないほどある．

5. ハイゼンベルクの物理の進め方

最後に，すでに上記した『部分と全体』の序で

湯川先生が述べられたように，ハイゼンベルクの物理のやり方は，ある種哲学的であり，先ず問題設定を重視する．何をどのような視点で問題にしようとするのか？ クォーク仮説はその問題設定で誤っていると彼は主張する．とにかく彼は客観情勢が許すような正しい問題設定に成功すれば，問題をすでに半分は解いたようなものだという．このあたりは比較的ゆっくり構えている．

そこで解くべき問題が正しく設定できたら，それを解くことに集中する．なかなか解けないときにはとにかく，考えて考えて集中して考え抜く．この“集中力の持続”こそまさしく一瞬の閃きを，既存の体系を焼き尽くす本物の焔に成長させられる天才の資質に不可欠の要素に違いない．それでも解けないときには徹底的に粘る．今のやり方では解けないなら協力者がいるときはその人達と徹底的に議論して，別の角度からの攻め方がありそうならそれらを色々試みてみる．とはいえ一人で研究を進めている場合にはいつまでも同じことを考えていては，堂々巡りになってしまうこともあるだろう．そういうときのがらりとした気分転換が，彼の場合はピアノ演奏であり，また時には仲間との山登りやスキー，さらに若かった頃には時間が許せば一カ月に及ぶヴァンダールングなどのスポーツ等であった．彼がいったん解くと決めた問題は答えが出るまで絶対にあきらめない，解けないなら何故解けないのかが納得がいくまで粘る．そのあたりの問題解決への執念とも言えるほどの気迫は，本当にそばで見ていて感嘆するほどである．これがハイゼンベルク流である．

引用文献

1) W. ハイゼンベルク著，湯川秀樹序，山崎和夫訳『部分と全体』みすず書房（初版：1974，新装版初刷：1999，第 10 刷：2012）．

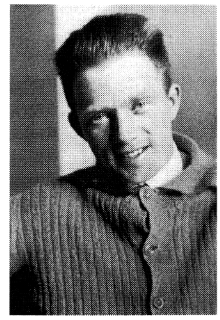
2) G. Buschhorn und H. Rechenberg 著，『Werner Heisenberg auf Helgoland』，Max-Planck-Institut für Physik (Werner-Heisenberug-Institut) München, 2000.

（やまざき・かずお，京都大学名誉教授）

ハイゼンベルク略年表

1901	12 月：ドイツのヴュルツブルグにて誕生．父は 1910 年以後ミュンヘン大学の中世および近代ギリシア言語学の教授．
1920	10 月：ミュンヘン大学で，ゾンマーフェルトの下で大学の学業開始．
1922	7 月：ゲッチンゲン大学で，ボルンの下で学業継続．当地でボーアと最初の出会い．
1923	7 月：ミュンヘン大学で博士の学位を乱流の理論研究で取得（学部入学から 3 年で）．
1924	7 月：ゲッチンゲン大学で大学講義資格取得，私講師に． 9 月から翌年 4 月までロックフェラー財団研究奨学生としてボーアの下で研究滞在．
1925	6 月：2 週間弱のヘルゴランド島滞在で，量子力学への飛躍の第一歩． 7 月：量子力学の基礎となる論文が“物理学雑誌”に受理．
1926	4 月：ベルリンの物理学コロキュウムで講演．アインシュタインと討論．
1927	3 月：不確定性関係の論文が“物理学雑誌”に受理． 10 月：ライプチッヒ大学理論物理学正教授に． 同月：ベルギーのブリュッセルで第 5 回ソルベイ会議に出席．
1933	12 月：遅れていた 1932 年度のノーベル物理学賞を受賞．
1937	4 月：エリザベート・シュウマッハーと結婚，7 人の子供．
1941	9 月：コペンハーゲンでボーアとハイゼンベルクの対談（演劇“コペンハーゲン”のテーマ）．
1942	7 月：ベルリンのカイザー・ウィルヘルム物理学研究所・所長に． 10 月：ベルリン大学の正教授に．
1945	7 月から翌年 1 月までイギリスのファームホールに抑留．
1946	1 月：カイザー・ウィルヘルム研究所をゲッチンゲンにマックス・プランク物理学研究所と改名して再建，同研究所長に．
1958	2 月：ゲッチンゲン大学の物理学コロキウムで素粒子の統一場理論を発表． 9 月：マックス・プランク物理学・天体物理学研究所ミュンヘンへ移転同研究所長に．
1970	12 月：上記研究所長を定年退任．
1976	2 月：ミュンヘンの自宅にて癌のため逝去．

ハイゼンベルクの育ち，才能，人柄と対話による学問の創生と進め方


量子力学創始の 23 歳頃のハイゼンベルク．

山崎　和夫

1. はじめに

ハイゼンベルクはかつてディラックの反物質の存在の理論的予言を讃えて，20 世紀の理論物理学の 3 大発見を敢えてあげるとすれば，量子力学，相対性理論，反粒子（反物質）の発見であろうか？と述べたことがある．後の 2 つはそれぞれアインシュタイン，ディラックの名前が結びつくが，量子力学には一人の名前を挙げるのは難しい．それだけ大きく難しかったとも言えよう．いずれにせよボーアによって前期量子論の形でその完全な発見への道筋が付けられていたとはいえ，先ず最初に量子力学への決定的な第一歩を踏み出したのは今回の特集号のテーマ“ハイゼンベルク”であることには違いない．そこで本稿では，導入部としてあまり物理学そのものでない読みやすいお話的なその人の輝かしい栄光の前半生頃の人物像のようなことをご紹介することにし，複雑な苦悩の後半生にはあまり触れない．

2. 幼少期の育ち．神童がそのまま天才に．楽観主義と自信

湯川先生のハイゼンベルクと同世代の天才達の人物評に，ハイゼンベルク（以下では H 先生と略記することもある）については，何をやらせたとしても一流になれたであろう天才と書かれていたのを覚えている．しかも彼はそのような天才などにありがちな奇人，変人でなくごく親しみやすく優しい普通の人であった．実際，直接会って話してみると，いかにも切れ者という怖さをほとんど感じさせない，相手の言うことをよく聞いてくれて，その中の良い点を認めて伸ばそうとするプラス思考に気づく．パウリ等のようなぴりぴりしたところが全くない．こうした良き教育者的な面で H 先生が最も多くを学んだのは，後でまた話が出てくる大学時代の恩師ゾンマーフェルトであったろう．H 先生が人を厳しくしかったのを見たことも聞いたこともない．ただ，先生の信頼を裏切った者に対しては，以後永久に一切関係を絶つ．これがハイゼンベルク流である．それは身近で経験したことがある．これは小（国民）学校に入学して間のない頃に，彼の教師が身に覚えのないことで少年ハイゼンベルクを鞭で強くたたくという体罰を加えるほどひどくしかったとき以来，二度とその教師と口も聞かなかった事件以来彼の身についたやり方であった．

H 先生は若い頃はそれほど哲学好きではなかったようである．しかし彼の父親（A. Heisenberg）は有名なミュンヘン大学の中世および近代ギリシア言語学の教授であった．従ってプラトンを始めギリシア哲学書は原書でギムナジウム*1)時代によく読んでいた．故に彼の哲学的バックボーンはギリシア哲学であったことは間違いない．このよう

*1）9 年制中高一貫校，ただしその場合は小学校は 4 年で終える．

にまだ幼くて意味をよく理解できなくても，暗記するほど頭にたたき込まれた若い頃の記憶が，後の生き方に大きな影響力を持つようである．H 先生は，その父から“物事に深く感動するという恵まれた資質”と“いかなる時にも失われない楽天的な気質”を引き継いだ．この楽観主義は，上にも名前の出たゾンマーフェルトに学んだと先生自身は語っている．更に彼の母方の祖父で後に彼が学んだミュンヘンの名門ギムナジウムの校長であったヴェックライン（N. Wecklein）は，まだ幼児期の賢い孫をかわいがりしばしば散歩に連れ出し，彼に色々人生で大切なことを教えたらしい．また優れた教育者でもあった彼の父は，2 人の息子と一緒にあらゆる種類のゲームをして，それを子供の教育に巧みに生かしたという．例えば彼の 1 歳半年長の兄の持ち帰った数学の宿題を競争して解かせ，彼の方が早く解けたこともあったらしく，数学に対する興味と能力の芽生えはこの頃生まれたようである．このように父親は息子の競争心を絶えず煽ったので，ハイゼンベルクはギムナジウムの教師が，「自発的な勉強熱心，事物の根源を極めようという旺盛な好奇心，そして功名心に富んでいる.」と学籍簿に評価している．「“私は，一種の神童だったんだよ.”と彼はいくらか照れながら私に話しました」と奥様の書かれた先生の追憶書[2)]にある．「14 歳の時すでに彼は化学の博士試験を受けるために必要な数学の勉強をしていた知り合いの一人の女子学生の数学の家庭教師をしたことがありました」，とも．しかし彼は五歳の時肺炎で危うく死にかけたことがあり，これで母がかなり過保護になったらしい．更に大学入学前にもかなりの期間下記の先駆者運動の宿泊地で伝染したチブスによるひどい病気になり，その療養中ワイルの『空間・時間・物質』を読んで相対性理論を学び，理論物理学との最初の出会いとなった．その後第二次世界大戦後しばらくしてからも大病をして，写真で見ても外見は急に老け込んだのが解る．このような 3 回の大病のほかにもひどいアレルギーを繰り返し，傷つきやすい弱々しい一面も持っていた．後日彼の妻も先に挙げた追憶書に「彼のたくましく，血色の良い外貌にもかかわらず，非常に繊細でとても優しい人でした．「短く整えられた金髪，明るく澄んだ瞳，そして輝くような表情，彼は純朴な若い農夫のようでした」と，M. ボルンは，ゾンマーフェルト宛の 1923 年の手紙に書いています．さらにボルンは続けて，「彼が何かを把握するときの信じがたいほどの素早さと，正確さは，常に苦もなく，途方もない業績をあげる能力を彼に与えていた.」と書いています．しかし，この仕事をするときの集中力と彼の魂のダイナミズムには，その代償もありました．夏になると，長い間彼を悩ませたひどいアレルギーと，それに伴って絶えず彼が煩わされていた多くの肉体的な苦しみは，この高度な繊細さのもたらす身体的な表れでした.」と書いている．ところで，上記の彼の功名心のことだが，確かに彼は負けず嫌いであった．彼のチェスの腕前はたいした物で普通の級友には女王抜きでも勝てたというし，チェスの一局を全部頭の中で再現できたという．大学生になって，師のゾンマーフェルトにチェスは時間の無駄使いだと禁止されて，やっと止めたと言うことである．ライプチッヒの教授の頃はゼミの後研究室員とよく卓球のトーナメントを楽しんだと聞いており，私も一度お手合わせをしたいと願っていたが，それは客観的に無理であった．しかしそのような勝ち気さは何かの出来る人には，目立つか目立たないかは別にしてたいていの人が持っている性格だと思う．殊に彼の場合にはそれは“闘争本能的な”もの，つまりスポーツマン的な，フェアプレイでの勝ちたい感情であり，いやらしい感じの功名心ではなかったと私は思う．ヴァイツゼッカーがハイゼンベルクへの弔辞の中で彼の人柄を次のように述べている．「彼は，先ず第一に自由意志の人であり，次に天才的な学者であり，第三には創造力を持った一人の芸術家であり，そして最後に義務感に基づいた“政治的な人”」と．

3. 青年運動「先駆者」のリーダーとしてその後の生き方の基盤を築く

「ハイゼンベルクはその『部分と全体』の書き出しを，ギムナジウム上級生として第一次大戦後のドイツ青年運動である「先駆者」への参加にあて，彼の大人としての価値観形成に，もっとも強い影響を与えた体験であった」とキャシデイは書いている[4]．そこで彼は原子学説と初めて出会い，その仲間達と結んだ親密な友人関係は終生保持された．彼等が求めたものは戦後の混乱から抜け出して，新しい秩序を生み出すことであった．それは彼の心中で育てられ，彼の哲学もしくは学問の中心に位置する彼の“神”である，“全世界の中心的秩序”へと発展していった．（以下でも主としてキャシデイ[4]からの引用に多少の私見を加えた．）

彼は当時年長の17歳でギムナジウムの8学年の生徒であり，数学と音楽の才能から学校で好かれ尊敬されていて，知的な自信と立派な容姿とリーダーの資質に恵まれていた．山や田園に親しむ「自然の良き友」としても知られていた．それで全隊員の推挙で小さなグループのリーダーに選ばれた．完璧な選択であった．「先駆者」へは彼のミュンヘン在住時代はそのままずっと次第に人数の増えたグループのリーダーを続け，その地を去ってからすでに一人前の研究者として大活躍していた頃も，運動のOBとしてしばしば活動に参加し，1925年の量子力学創始の頃も，更にライプチッヒ大学教授の時代にも，時間の許す限りずっと運動に関わってきた．これは1933年のナチス政権の出現まで続いた．「1920年代の彼の研究の信じられないほどの猛烈さは，彼が野外に出ていた間に完全にリラックスできていたからこそ，可能だったのだ．（彼には，この運動のサークルの外に友人はほとんどいなかったし，知人すら少なかった．煙草とアルコールは厳しく禁じられていた．）

彼はそこで，今までにない新しい一生続く信頼関係を見いだしたのである．若い追従者達はハイゼンベルクの中に彼等が必要とする賞賛に値する父親像を見いだし，また彼等に規律と目標を与え，絶対的な信頼を置くことの出来る誠実な年長者を見いだしたのである．

彼は，1920年代を通じて政治から身を遠ざけていた．彼はこの頃から社会民主主義に近い思想を抱いていたようであるが，彼が物理学を――自然や音楽と同様に――汚れた政治の世界を超克する，高水準な存在と真実に属するものとみなしていたからだろう．」と．

「彼がこの運動に携わっていた頃，真剣な対話の相手として気に入っていたのは『部分と全体』の第1章で名前の出てくるクルト・プフリューゲル，カール・ゾンターク，ロバート・ホンゼルで，年齢も発達の程度も近い三人の若者であった．彼等の活発な対話の有様は上掲書で味わって頂きたい．クルトとカールは大学で工学を学ぶ予定であり，科学的な内容も論じ合ったが，明らかにもっとも影響力のあったのはホンゼルであった．」

「ハイゼンベルクは後年，彼の知的発達にもっとも影響を与えた三人の人物の名前を挙げたが，ニールス・ボーアとカール・フリードリッヒ・フォン・ヴァイツゼッカーに挟まれてホンゼルが二番目にあがっている．ボーアは年長の恩師であり，後の2人はハイゼンベルクの友人と弟子兼友人である．ヴァイツゼッカーが言うには，自分たち三人は皆，もう一人の恩師ゾンマーフェルト譲りのプラグマティストであるハイゼンベルクに，科学をめぐる哲学的な内省を促す貴重な後押しをし，また彼の科学観に対しても，同様に欠かせない批判的視野をもたらした．ホンゼルは明らかに読書家の若者であるから，ハイゼンベルクに西洋哲学の伝統を教授したのは彼であったかも知れない．ホンゼルは「非常に深い洞察力を持つ男」として記憶されている．彼は一度哲学に関する本を書いたが，自信が無くて出版しなかったと言われている．個人的な野心がなかったのだろう．彼は後に郡裁判官になった．「先駆者」の彼等の対話は，神学や観念論哲学のようなものが主で，それは原子の実在から信仰の基盤，中心的秩序の存在に及んだ．経済や政治はほとんど話題にならなかった．」ハイゼンベルクは後の『新しい形態の古い価値』という彼

の論説の中で「同じ科学の中であっても，我々の関心が集中していたのは，既知のものを如何に発展させるかと言う問題としては捉えない分野の科学でした」と書いている．

ハイゼンベルクは親友パウリの助言もあって，自分が新しい創造的なものを達成できるのは原子物理学の世界であることを悟った．彼は『部分と全体』でワルターの母親に「世界の将来はあなた方若者によって決定されるでしょう．もし若者が美を選べば，もっと多くの美が生まれてくるでしょうし，また彼等が役に立つものを選べばもっとたくさんの役に立つものができてくるでしょう」と述べさせている．しかしハイゼンベルクは動かされなかった．原子物理学の新奇さはそれほど魅力的なものであった．「ここにこそ〈未知の大地〉が開けるものと信じます．…(略)…この中で何らかの役割を果たすことが，非常に魅惑的なものに思えるのです．…(略)…彼の初期の努力には，危険を冒すことを厭わぬ傾向やプラグマチックな粘り強さが表れており，彼の天性の知的自信と野望が生んだ成果であると同時に，青年運動での訓練の賜物でもあるだろう.」と，キャシデイは書いている．政治的なこと等に関しては，青年運動の発達環境の中で，若い隊員達との特別な関係に属する者としての自覚も生まれ，ハイゼンベルクは彼等に対して，生涯にわたる全面的な責任を担っていた．

それでは具体的にこのような青年運動とは日常的にどのようなことをしていたのだろうか．詳しい活動や対話の様子は『部分と全体』にも書かれているが，要約すると週末には田園へ歌など歌いながら日帰りの徒歩旅行をして過ごしたり，日中山野を歩き回り，歌い，夜には星空の下の野営や，天気の悪いときには農家の納屋の甘くにおう干し草の上で眠り，翌朝には宿泊のお礼として農家の雑用を手伝ったりした．ドイツではインフレーションがたけなわの時代であったが，このような生き方には無縁であった．晩のキャンプファイヤーではハイゼンベルクもまた皆に大きな声でゲーテやヘルダーリンなどのドイツ・ロマン派の詩人や作家の作品を読んで聞かせた．このような文学の後には，音楽が始まり，隊員は最低一つの楽器を演奏できたので，時にはちょっとした合奏をしたりした．しかし音楽の楽しみのハイライトはやはり，ハイゼンベルクが本気でピアノに向かい，彼の愛するバッハやモーツァルトを弾くときであった．

4. ゾンマーフェルトのゼミナールに入り，パウリと運命的な出会い

奇しくもハイゼンベルクと誕生日が同じで 33 歳年長で，彼の恩師の一人でもあったゾンマーフェルトは，1906 年に着任した当時はまだミュンヘンという一地方大学の理論物理学の講座（その頃は数理物理学と呼ばれていた）を 45 年間の在籍期間中に，ゾンマーフェルトの門下と呼ばれる一つの学派に育て上げ，ハイゼンベルク，パウリ，デバイ（P. Debye），ベーテ（H. Bethe）を含む多くのノーベル賞学者を輩出し，アインシュタインに「私には欠けている，打ち出の小槌のように人材を生み出す才能を持っている」と讃えさせた．こうしてミュンヘンをコペンハーゲン，ゲッチンゲンと並ぶ原子物理学の世界の三大メッカの一つとすることに成功した．ナチスの時代にその秘蔵弟子ハイゼンベルクを自分の定年後の後任に迎えようとしたが，ナチスににらまれていたハイゼンベルクは政治介入で排除された．また彼は理論物理学の全分野を一人でカバーできた教授で，（ランダウ，フェルミ，ファインマンなども？）3 年間 6 学期間かけて繰り返された理論物理学の講義は，出版されて当時は世界的な教科書となった．しかし彼の物理学に対する姿勢は，哲学的ではなくむしろ解くべき問題の方程式の複雑な数学的解法を得意とし，その結果として得られた理論値と測定値との一致を最高目標とするプラグマチックなものであった．

そこで 1920 年にハイゼンベルクが，いわば学部課程に相当する課程を飛ばして，いきなり大学院生や研究者の出席するゾンマーフェルトのゼミナールに入って，「私は相対性理論のような哲学にも絡む理論物理学をやりたいのです」と申し出た

ときに，師はシラーの言葉を引用して「“王様が土木工事に着手すると人夫達は仕事にありつける.” はじめは我々はみんな人夫なのですよ！ ですから先ず小さな仕事から手を付けて，丁寧に計算をすることから学ぶべきです」と，諭した．それでも話しているうちに弟子の才能を見抜ける優れた教師であった師は，次に会うときにはもっと最新の実験結果に関わる課題を用意しておいてあげようと約束してくれた．そして約束通り次回には，異常ゼーマン効果のスペクトルに関する測定値をハイゼンベルクに与え，その測定値に合う公式の発見を要求した．それはすでに博士論文になり得る立派な研究課題であった．その仕事をハイゼンベルクはわずか 1～2 週間で完成させ，師の下へ提出した．それはゾンマーフェルト流の前期量子論を用いて実験値を見事に説明するものであった．量子論では不連続性を表す要素として量子数が用いられ，それは $1, 2, 3, \cdots$ のような整数値をとった．ところがハイゼンベルクの得た結果では，量子数に半整数 $1/2, 3/2, 5/2, \cdots$ を許したときのみ，実験とよく合った．しかしこれはそもそも量子論の精神に違反する事で，$1, 2, 3, \cdots$ と個数を数えられるのが量子であって，量子の半欠けは許されないものであった．そこで師とハイゼンベルクの間に長い討論が闘わされ，結局実験と合わせるにはどうしても半整数が必要であることを嫌々師が認めざるを得なかった．後日その話を聞いたハイゼンベルクの親友パウリが，どうせそのうちに君が $1/4$ や $1/8, \cdots$ の量子数を導入して，量子論を君の手の内で丸めてしまうだろうよ，と嫌みを言ったという．この半整数の量子数は当時未発見の電子のスピン 1/2 と言う回転の自由度に由来するものであった．このようにハイゼンベルクは大学入学早々に，すでに学位論文になり得る仕事を達成したのであった．

もう一つハイゼンベルクがミュンヘンの学生時代に経験した大切なことは，パウリとの出会いであろう．この 1 歳半年長の凄く頭の切れて理論物理学とそれに関連する数学の何でも知っている，鋭く批判的な男に出会って，生まれて初めて自分の上手（うわて）を行く一人の天才を知った．それが彼の生来の負けん気を煽った．学生時代以来いつもパウリには，そんなことを知らないのか，と散々言われながら必要な物理の知識を教わってきた．しかしハイゼンベルクの中に生まれる他人の思いつかない独創的で創造的な新しいアイディアと，パウリの批判精神の組み合わせこそ比類のない名コンビをなした．彼等がミュンヘンで学生時代を共有したのはわずか 2 学期間，1 年であるが，その友情と信頼関係は 1958 年のパウリの病死まで 38 年間続いた．しかしこの 2 人の共著論文で発表されたのは 1929～1930 年にかけての「場の量子論」I, II のみであるが（晩年の「素粒子の統一場理論」は 1958 年途中からパウリの離反でプレプリントで終わった），ハイゼンベルクはパウリの生きている限り新しい論文を書くたびに要旨を手紙で彼に送ってその意見を求めた．

ハイゼンベルクの次の滞在地としてのゲッチンゲンにも触れねばならないが，彼はその地で数学を学んだ，と後年回顧している．そこでの彼の師ボルンとはいささか微妙なところがある．1922 年から 1924 年にかけてその大学に在籍したのであるが，少なくとも 1933 年に（1932 年度の）ノーベル賞をハイゼンベルクが単独受賞するまではボルンは彼をとても気に入っていたことは確かである．一例を挙げよう．「ハイゼンベルク博士は，その若さにもかかわらず，すでに世界的名声を博している学者である．彼はその非凡な才能を数多くの研究によって証明し…(略)…私は彼を全ての若い同僚諸君の中でももっとも嘱望しているといっても言い過ぎではないと思う」と書いている（その後のことには，別にけんか別れしたわけではないが触れないで置く）．

5. ボーアの下で物理学の本質を哲学的にとらえ，自然科学的な問題の哲学的背景を学んだ

「物理学者としての自分の学問的成長はボーアとの出会いによって始まった」と彼は『部分と全体』

に書いている．それは1922年6月，後日ボーア祭と言われるようになったゲッチンゲンでのボーアの連続講義の三日目，当時20歳の学生であったハイゼンベルクの鋭い質問に，一瞬たじろいだボーアがその問題は後で二人で話し合おうといって，その日の午後ボーアがさそった郊外のハインベルクの丘への散歩から始まった．それまでハイゼンベルクはどちらかというとゾンマーフェルト流の問題を表す数式から解こうとする物理のやり方であったが，ボーアの考え方は全く違っていた．「例えば物質あるいは原子の安定性，原子で言うなら，色々な化学反応をした後でも，鉄原子なら鉄原子でいつでもどこでも正確に同じ性質を持った鉄原子が表れ，少しだけ違った鉄原子は出現しない．これは今までのニュウトン物理学では全く説明不可能なことです」と，ボーアは指摘した．「原子はラザフォード模型のように，単に太陽系のサイズをうんと小さくした物としては捉えきれない上記のような安定性を持っている．太陽系なら似ていても少しだけ違った惑星系を持った物がいくらでも可能である．いやむしろ我々の太陽系と完全に同じ形の太陽系は存在しないでしょう」と．「今までの物理学では，ある新しい現象を説明するには，すでに知っている概念や方法を使って既知の現象や法則に帰せしめることが出来ました．ところが原子物理学では，原子の構造の直観的な説明を与えることが不可能です．なぜなら，そのような説明には，直観的であるためには古典物理学の概念を使わねばならず，そのような概念では現象を把握できないからなのです．ですから我々のやろうとしている理論では，本来はほとんど不可能なことをやろうとしていることを理解してください．原子の構造について，何かを説明したいのに，そのためにお互いに理解し合えるような言葉を持っていないのです．だから経験の間の関連性を示し，慎重に手探りで進むしかないのです．あなたが今朝指摘した点はこのような曖昧さから来ているのです」とボーアは説明した．このような問題のとらえ方，あるいはこのような話は，今までゾンマーフェルトのところでも，ゲッチンゲンでも一度も聞いたことがなかったハイゼンベルクは，深い感銘を受けた．ボーアの方もハイゼンベルクがとても気に入って，是非一度コペンハーゲンに長期滞在して一緒に物理をやりましょう，とさそった．夕方まで散歩を続けて話し合い，「ボーアを彼の宿まで送っていった後，ユースホステルへの帰路も，輝かしい未来を心中に描き続けた，」と*2)．

ボーアの約束したコペンハーゲンへの招待は1924年9月から翌年の4月までの長期滞在としてようやく実現した．この期間2人で4, 5日間にわたる長い徒歩旅行をしたり，研究所でも1日に何時間も徹底した討論を重ね，すっかり肝胆相照らす師弟となった．徒歩旅行中にはもっと広い政治や歴史についても対話を重ねた．例えば第一次世界大戦の開始の日のドイツ国内の様子や，プロシア人の勤勉さと規律，戦争や愛国心あるいは戦争を避けるための努力，更にハイゼンベルクはプロシア式の共通課題への個人の従属，私生活の質素さ，誠実さと清廉さ，騎士道精神，正確な義務の遂行，等を褒め，ボーアはそれに対して個人の自由と独立性の方が，規律によって獲得された力よりも，我々にとってもっと大切なのだと説くといった具合に．

ボーアの話の終わりに量子力学のコペンハーゲン解釈に少し触れておこう．これはまさしくこの二人の対話から生まれたものであるが，二人の物理学のやり方がよく表れていると思う．先ずハイゼンベルクの不確定性原理であるが，これはたいして複雑な数式の計算は要しないが，結果としてのその原理を簡単な不等式で表すことが出来る．ところが内容的にはほぼ同じことを述べているボーアの相補性原理は，どうしても数式では表せない．言葉でしか表現できない．いかにもこの二人らしい理解の仕方であると私は思う．

それでは次にハイゼンベルクとアインシュタインの対話のことを述べよう．1926年の春，ベルリンの物理学談話会で，ハイゼンベルクは新しい量

*2)　これが『部分と全体』の第3章の結びである．ハイゼンベルクの楽観主義，未来はばら色観がよく表れている．

子力学(行列形式)の話をした．その後アインシュタインと交わした対話である．ハイゼンベルクが，新しい量子力学では，原子の中の電子の軌道という観測に直接かからない概念を追放して，観測にかかる量だけで理論を構築したことを強調したのに対して，アインシュタインは「霧箱の中の電子の軌道は観測にかかるのに，どうして原子の中の電子の軌道は締め出すのですか」と尋ねた．ハイゼンベルクは「後者は直接観測にかからないので，原子が放出する輻射から振動数と電子の振幅を求めて，それで原子内の電子軌道の代用品として使うのです」と説明した．ところがアインシュタインは，「物理学の理論は観測可能な量だけしか取り上げ得ないと言うことを，本気で信じてはいけません」と反論した．そこでハイゼンベルクはすかさず，「あなたこそ相対性理論で観測にかからない絶対時間を議論してはいけない，とされたのではないですか？」と．それから観測する，あるいは観測可能な量，とは何を意味するのかなどについて長い問答があり，アインシュタインが最後に「理論があってはじめて，それが何を観測できるかを決定するのだ．」と対話を締めくくった．

この最後のアインシュタインの言葉をハイゼンベルクは不確定性原理の発見の時に思い出して，問題の設定——霧箱の中の電子軌道は観測できる——が誤りで不確定に定められた電子の飛び飛びの列だけを見ているのではないかということに気づいた．これが突破口になった．

ハイゼンベルク流の物理学のやり方に，危険を冒す冒険的な勇気というものがある．これを彼は『部分と全体』の中で，コロンブスのアメリカ発見にたとえている．「この航海で最大の困難は，既知の陸地を離れ，残った蓄えでは引き返すことがもはや不可能な地点から，更に西へ船を進める決心であったに違いない．同様に科学における本当の新世界も，ある決定的なところで，今までの科学が土台としていた物を離れて，いわば虚空へ飛び込む覚悟がなければ発見できないものである」と．

*3) ということは，ナチスとのトラブルを恐れて，年長の誰かのように目立たぬ地位に引退する気はない，と．

アインシュタインですら，物理学理論の決定論にこだわって，量子力学の確率的解釈を認められなかったのもそれであり，その他のえらい人でもこのような限界を超えられなかった例も多い．

奥様の著書[2]から，私も確かにそうだと思う話を二つ引用させて頂こう．「ハイゼンベルクの性質の中で際立った一つの点は，頑固さでした．…(略)…目標へ舵を取り，まっしぐらに突き進むときの彼のひたむきさは類を見ないほどで，確かに彼の学問を成功させた一因でした．それは彼の長所でしたが，時としてはまた短所ともなりました．」もう一つはナチスの天下でさんざん虐められ，師ゾンマーフェルトの後継者にもなれなかったときに「私は，ここで二流の人間として生きてゆくつもりはありません」[*3]と，きっぱりと1938年4月ゾンマーフェルトに手紙で書いている．まさしく彼の自信と自尊心を示している．

困難の解決について，ディラック流とハイゼンベルク流の話で終わりにしよう．ディラックは「人は一度にたった一つの困難だけしか，決して解くことができない」であり，それに対してハイゼンベルクは正反対に表現して，「人は決してただ一つの困難だけを解決することはできない．人は多くの困難を一度に解決することを常に強制される」と．これに対してボーアは「正しい主張の反対は誤った主張である．しかし深遠なる真理の反対もまた深淵なる真理であり得る」と，この外面的な矛盾を締めくくった．さらにハイゼンベルクは自然は理解され得るように作られていると確信していた．それは「我々の魂の構造を，従って我々の思考能力を支配しているのは，あのいつも同じ秩序を作る力である」と．

引用（参考）文献

1) W. ハイゼンベルク著，湯川秀樹序，山崎和夫訳『部分と全体』みすず書房 (1974).
2) エリザベート・ハイゼンベルク著，山崎和夫訳，『ハイゼンベルクの追憶』みすず書房 (1984).
3) アーミン・ヘルマン著，山崎和夫・内藤道雄共訳『ハイゼンベルクの思想と生涯』講談社 (1977).
4) デヴィド・C・キャシデイ著，金子務監訳『不確定性——ハイゼンベルクの科学と生涯』白揚社 (1998).

(やまざき・かずお，京都大学名誉教授)

行列の話

村上　陽一郎

1. 量子論と量子力学

細かいことを言うようですが，量子論と量子力学とは区別されることになっています．英語の〈quantum theory〉と〈quantum mechanics〉の違いがそれに当たります．もっとも，日本語では「前期量子論」という言葉が使われたこともありましたが，今では上の二つで整理されていると考えてよいでしょう．つまり「前期量子論」というのは，「量子論」で代表されてしまうことになります．そのことからも判りますように，この二つは，内容的にもさることながら，歴史的時期によって区分けされるものでもあります．その区分点は，大体1925年と考えてよいと思います．

2. 量子論の時代

他の記事でも説明されるでしょうが，**量子**という概念は，大体19世紀と20世紀の変わり目の頃に，初めて誕生しました．それは，主として二つの局面から生まれてきたと申せましょう．一つは，理論的な性格のもの，もう一つは，むしろ産業革命の進展とともに現れた現実的な性格のものでした．

現実的側面での初期の展開はこんな風に始まりました．19世紀後半産業革命は新たな段階を迎え，軽工業から鉄鋼を中心とした重工業へと進展しつつありました．鉄鋼産業の発展は，必然的に高温，高エネルギーの世界へと人々を誘い，熱放射に関する豊かな課題を内包する新しい現場が創出されたのです．**黒体放射**という課題もその一つでした．

黒体というのは放射線（光線と熱線の区別は本来存在しないという前提の下で）のすべてを吸収する物体として定義されます．その黒体の放射というのは，いわば放射の理想状態を意味するもので，高温に熱せられた場合にあらゆる波長の放射線を放射すると想定した上で，そこで得られる放射スペクトルを指しています．1860年頃，グスタフ・キルヒホッフという物理学者が，このようなスペクトルにあっては，波長と温度のみが，本質的に現象に関与するということが明らかにしています．つまり，使われている素材の性質や状態などは，偶発的なものであり，一切考慮しないでよい，という「理想状態」を意味するものであったわけです．

そこから有名なヴィルヘルム・ヴィーンの二つの規則が導かれました．最初の規則は，一言で言えば，波長と温度は，その積が常に一定になるように変化する，ということを示していました．さらにヴィーンは，熱放射体を「気体」と見なす，という設定の下で，放射の波長を分子の速度の関数として考えることにより，エネルギー分布を算出する公式まで手に入れました．前者をヴィーンの変位則，後者をヴィーンの分布則と呼んでいます．これらの規則は，熱力学と電磁気学の融合の形で生まれたもので，理論的な性格のものでしたが，すでに述べた高熱，高エネルギーの現場で得られる

データとよく合っていました．

ところが困ったことに，この分布式は長波長領域では，実験的なデータが満足させないのです．キルヒホッフの後任としてベルリン大学の教授になったのがマックス・プランクでしたが，このプランクは，キルヒホッフの問題意識を受け継いで黒体放射の問題に取り組むことになります．実は，ここにはもう一つ厄介な問題がありました．普通「紫外発散」と言われています．ヴィーンの分布式は，長波長で実験値と合わないばかりでなく，波長が短くなる（つまり振動数が大きくなる）極限で，放射エネルギーが無限大になってしまう形を持っていたのです．それを「発散」の問題と言いました．プランクはこの発散の問題と長波長の場合の困難を回避するために，エネルギーが「連続量」ではない，という仮説を立ててみることを思いつきました．これは一種苦肉の策でありましたが，これによってヴィーンの規則を導くことのできる基礎的な式を立てることができることを確かめました．ここでの工夫は，エネルギーの量を，連続量ではなく，「エネルギー要素」と呼ばれる ε の整数倍という形で定義することでした．この着想がプランクの手で公表されたのは，ちょうど1900年のことで，このエネルギー要素という概念こそ，量子という名こそ与えられていませんが，量子の誕生を予告するものでした．$E = h\nu$ という簡潔な式に最終的に集約されたこの関係は，エネルギーが h という係数を媒介として振動数 ν と等値されることを示しています．

波長あるいはその表裏概念である振動数は，波動に関する概念ですから，当然連続的な世界ですが，それがエネルギー（しかも，ここでの前提では不連続量とされているのです）と等値されるという「矛盾」は，結局量子論の矛盾として，長く残ることになります．

この段階でのプランクは，あくまでも黒体放射の枠の中で，ヴィーンの式を救うための便宜的な手段としてエネルギーの素量を考えていた節があります．それを，その限定された枠組みから切り離し，より普遍的な場面に導いたのが，あのアルベルト・アインシュタインでした．相対性理論の第一報が発表されたのと同じ年，アインシュタインはいわゆる「光量子仮説」の論文も発表しています．つまり，光の波動論とは異なる光エネルギーの不連続性の容認，あるいは光一般について原子的な素量を導入すべきであるという考え方を，明らかにしたからです．そこには，光電効果として知られる現象も絡んできます．光電効果は金属面に光（可視光線も含め）を当てると，電流が誘起される現象ですが，これは光のエネルギーを受けた金属内の電子が叩き出されると考えられます．ただ面白いことに，金属によってこの効果が起こる振動数が異なります．つまり，当てられた光によって与えられる電子のエネルギーは，光の振動数に依存しているわけです．これは先ほどのプランクの式 $E = h\nu$ を裏書きしていることになりませんか．また，当てられた光の強さに比例して，叩き出される電子の数は増えることも判っているため，光のエネルギーそのものも，光のエネルギー粒子の数の大小を前提にすれば説明がつく．つまり光量子というアインシュタインの仮説は，裏書きを得たことになります．

2.1 もう一つのアプローチ

と書いたのですが，プランクの仮説も，アインシュタインの光量子仮説も，どちらも，先ほどの矛盾が強く意識されている当時は，半信半疑のままに推移していたというのが本当のところでしょう．

一方で，19世紀初め，可視光線の連続体スペクトルのところどころに，鋭い条線が入って，連続体が分断されること，またその条線が物質に特有の振動数に関連していることが発見されていました．スイスのアマチュア物理学者ヨハン・ヤコブ・バルマーは，水素原子を使ったスペクトルに現れる三本の条線の系列に，ある経験的な規則があることを見付けました．それは，条線の振動数が，光の速度 c を媒介とした簡単な分数式で表されるというものでした．この式はその後，より一般化された形に整理し直され，可視光線のスペクトルの外でも成り立つことが判りました．強調しておきますが，この式は，手に入るデータにできる限り

忠実な規則性は何か，という問いに答えるもので，その意味で純粋に「帰納的」な性格のものだった，ということです．

ところが，この規則性を，全く別の理論の側から導き出すことができる，ということを明らかにした人物がいました．それが量子論最大のキーマン，ニールス・ボーアでした．ボーアは大学を終えて間もなくイギリスに渡り，アーネスト・ラザフォードを訪ねました．ラザフォードは，有名な原子の構造としての**惑星モデル**を提案していました．原子核を中心に，幾つかの殻上を電子が惑星のように回転している，というモデルです．ただこのモデルの難点は，回転する電子は，エネルギーを失い，中心の核に向かって落ち込む（回転しながらですから，らせん状を描くことになります）はずなのに，実際にはそうはならないのは何故か，ということに答えなければならなかったのです．もう一つ，ボーアのラザフォード訪問のタイミングが，ちょうど第一回のソルヴェー会議（1911 年）からラザフォードが帰英した直後だったことは，大切な要素でした．

ソルヴェー会議というのは，アンモニア・ソーダ法の開発で巨利を得たベルギーの企業家エルネスト・ソルヴェーが，基金を作って始めた物理学の会議で，特に，ちょうど展開し始めた量子の概念をどのように考えるべきか，というトピックスが，第一回の会議の最大の話題でした．ラザフォードは，ここでの討議の内容を，若きボーアに伝えました．量子について手ほどきを得たボーアは，コペンハーゲンに戻って，ラザフォード・モデルの難点を考え始めました．そして一つの解を得た，と確信するに至りました．それは，こんなアイディアです．

それまでの電磁気学の基本（それはマクスウェルの方程式に基づいています）に立てば，電子の回転エネルギーは連続的に変化する．だから核からの距離（電子の回転軌道の半径）も連続的な値をとらなければならない（しかし，ラザフォード・モデルでは，軌道は，惑星の軌道のように固有の半径に定まっている）．そこで，電子の回転エネルギーは（量子概念が示唆するように），連続ではなく，不連続な変化をすると仮定しよう．そうすれば軌道半径も不連続に定まる．それを**プランク定数**の整数倍と捉えてみよう．電子は，ある軌道から別の軌道へは，いわば飛び移るものとする．飛び上がるには，ある量のエネルギーを受け取る，飛び降りるには，やはりある量のエネルギーを（電磁波として）放出する．放出される電磁波の振動数 ν とプランク定数の積が，飛び降りる前の軌道におけるエネルギーと，飛び降りた後の軌道上のエネルギーの差になる．つまり $E = h\nu$ が，ここでそのまま利用できることになるのです．この関係を利用すると，先のバルマーの規則性（後にリュドベリの法則としてより洗練されるのですが）を，計算から導き出すことができることになりました．

これで，量子論のお膳立てはほぼ揃ったことになります．世紀末から 20 世紀初めの約 20 年間に，いろいろな角度から，エネルギーが「不連続な」量によって成り立っている，ということは，次第にはっきりしてきて，自然は連続である，という誰も疑わなかった常識は，少なくともこの点に関しては，どうやら成立しない，という新しい常識が定着し始めたということができます．

もっともボーアは，その間に，スペクトル線の振動数に関しては，バルマーの規則性を導出できるような，原子の内部構造における量子化の説明に成功していましたが，他方で，スペクトル線の「強度」に関しては，マクスウェル以来の連続的な法則のほうが，うまく現象に合うことを説明しようとして**対応原理**を提案することにもなります．すでに上のモデルでも，電子の軌道半径を極端に大きくとれば，エネルギーを不連続量と考える必要がないことを悟っていたボーアは，エネルギー状態が極めて高い（軌道半径が極めて大きい）ところでは，微細な遷移しか起こらず，連続的な変化と見なして差し支えない，ということをまとめて，量子的非連続の世界と，古典的連続の世界との間に，橋渡しができるということを集約したのが対応原理と呼ばれるものでした．

このように，量子論の最前線に立つ立役者になっ

たボーアのいるコペンハーゲンには，理論物理学研究所が設立され，量子論に関心を持つ物理学者が世界中から集まるメッカの様相を呈するようになりました．

3. 量子力学の成立

量子論が成熟するコペンハーゲンで，重要な役割を果たした人物の一人が，ヴェルナー・カール・ハイゼンベルクです．ハイゼンベルクは，このころ，これまで登場した物理学者たちよりは一世代若い，学位取り立ての研究者でした．彼は，ドイツ語圏で物理学の基礎を学んだ後，ボーアのいるコペンハーゲンに留学する奨学金を得ました．

1924年，ハイゼンベルクは憧れのボーアの許に到着します．ときあたかも第一次世界大戦が終了直後のこともあって，当初ボーアは，ハイゼンベルクを遠足に連れだし，物理学の話題よりもまず，ドイツの状況について，いろいろと聞き出そうとしたように思われます．このときの対話のありさまは，ハイゼンベルクの自伝的回想録である『部分と全体』（山崎和夫訳，みすず書房）の中に再現されています．

ところで，ハイゼンベルクが抱えていた問題は何だったのでしょうか．ボーアの原子構造に関する量子化によって解決されるのは，光の振動数に関わるものでした．それがバルマーの規則性を導き出すほどうまくいったのですが，他方では，光の強度に関しては，古典論の方が実情に合っているという難点があって，「対応原理」を持ち出さなければならなくなってもいました．ところで，それほど長いわけでもない量子論の伝統の中では，原子の振動数は，ほとんど常に，電子軌道と重ねて，いや，むしろ当初から電子軌道を基礎として捉える習慣ができていました．ボーアの対応原理の着想も，極端に大きな電子軌道においては，エネルギーは量子的というよりは，連続的に考えてよい，というところに基礎がありました．

しかし，とハイゼンベルクは考えます．軌道というのは，観測に関わる量とは言えないのではな

いか．物理的な意味で観測可能なのは，軌道ではなくて，振動数であり，強度ではないのか．だとすれば，光の振動数と強度との関係に着目することこそ，物理学的な方法に忠実なのではないか．

電子がある状態〈m〉から別の状態〈n〉に移る（遷移する）とき（つまり軌道という立場から言えば，一つの軌道から，次の軌道に移るとき，ということになるのですが），そこで放出される光の強度は，観測にかかる量です．そこで，m と n に関わる $a(m,n)$ という量を定めます．そして遷移のときに放出される光の強度を，この量で表現することを試みます．ここで光の強度は，アインシュタインの光量子仮説に基づいて，光子の「数」とします．するとその数は状態 m と状態 n との間の遷移確率に比例する．この確率をすべてのエネルギー状態のペア（m と n の）について計算することができるはずである．これは，m と n の無限正方の二数によって定まることになる．

これがハイゼンベルクの着想でした．そしてこの手法を，強度のみでなく，振動数に関しても適用できる，というのが，彼の結論で，1925 年に論文として公表されました．ところで，この手法は数学的な立場から見れば，行列の算法に相当することを，明示的に受け取ったのは，数学に長じていた同僚のマックス・ボルンとパスクアル・ヨルダンでした．行列という数学の一分野は 19 世紀に数学として確立されていたと言ってよいのですが，それが物理学の世界に導入できる手法の一つだ，ということは，ハイゼンベルク–ボルン–ヨルダンによって，ここに初めて認められたことになります．

ところで，**行列の算法**では，加法と乗法とはかなり違っています．行列 A と行列 B の和は，各要素の和を要素とする行列を造れば済みます．だから，$A+B$ も，$B+A$ も，結果として得られる行列は同じになります．しかし同じ行列 A と行列 B でも，その乗法の場合は，$A\times B$ と $B\times A$ とでは，積算された要素が同じにならないので，結果として得られる新しい行列は，異なることを認めなければなりません．こうした場合 A と B とは積算において交換不可能（もしくは非可換）な二量と言われます．

ボルンとヨルダンは，ハイゼンベルクの論文の内容に手を加えて，洗練された行列論の手法で書き直し，同年および翌年に「三人衆による」論文として発表しますが，その論文のタイトルが「量子力学に向けて」〈Zur Quantenmechanik〉となっていました．ここに初めて「量子力学」という概念が登場したことになります（この語自体は 1924 年のボルン単独の論文名として使われています）．

この三人衆の論文には，極めて目に立つ一つの関係が明示されていました．それはボーアの対応原理を基にして導出された，$pq-qp=-(h/2\pi)i$ という関係式でした．ここで p,q は，それぞれ運動量を行列化したもの，座標を行列化したものに相当します．この式の右辺は，古典論で考えたときにはゼロになってしまうものです．なお，現在では右辺の定数〈$h/2\pi$〉を，プランク定数と呼び，$\hbar$（エイチ・バーと読んで下さい）と書くこともあります．

この成果に最初に目を付けたイギリスの天才ポール・ディラックは，「量子力学なんて簡単なものだ，要するに非可換な代数を使って古典力学を書けばよいのさ」という有名な警句を残したと言われます．

いずれにしても，座標と運動量とは古典力学の基本概念であり，ハイゼンベルクらが，こうした定式化を「量子力学」と呼んだのは，古典力学の書き換えという明白な意識があったからだと思われます．こうした意識は，量子概念の提唱者であったプランクや，アインシュタインには，なかったものでした．その意味で，ここに新しい力学体系としての「量子力学」が誕生した，と言えるのではないかと思います．

4. ド・ブローイの挑戦

ただ，通常「量子力学」の誕生，言い換えれば，量子論から量子力学への転換には，もう一つの物語が付随することになっています．それは，ハイゼンベルクらとは全く異なるアプローチを試みた

フランスのルイ・ド・ブローイによって果たされました．

出発点は光の本性を巡る問題でした．よく知られていることと思いますが，アイザック・ニュートンはかつて光の本性を粒子と考えました．というのも，もし波動だとすれば，宇宙空間のような，波動を支える媒体のない真空（に近いところ）も，光が問題なく通過することが説明できないからでした．しかし，一方では，回折現象のように，波動と見なすほうが都合のよい場面もあって，最終的な結論は19世紀まで持ち越されていました．しかし，すでに見たようにアインシュタインは光量子という概念を提案し，新たな光の粒子像が勃興し，その上，電磁波という言葉通り，振動数や波長という，波動に関する概念で電磁波一般を整理することも，広く受け入れられ始めていました．その頃の冗句に，光は月・水・金は粒子で，火・木・土は波動だ，というのがあったくらいです．

ド・ブローイ（兄のモーリスも，同じ物理学者として協力しましたが）は，粒子像と波動像とを結びつける方法はないかと考えました．ヒントになったのはアインシュタインの有名な公式 $E = mc^2$ でした．ところが量子論から得られる結論は $E = h\nu$ です．それならば，同じエネルギーを介して，この二つの式は，等式として結ぶことができるのではないか．それがド・ブローイ兄弟の出発点になりました．言うまでもなく質量 m は物質（質点として抽象化されてはいますが）に関する概念です．それがプランク定数を媒介して，振動数 ν という波動に関する概念と等値されていることになります．物質と波動とは，〈別の〉ものではなく，両者の統一像が得られるはずではないか．

この解釈には，例えば光粒子の内部振動を想定し，粒子の「随伴波」という仮定の下で，内部振動の位相と，仮定された随伴波の位相が一致すると考えることを通じて，物質粒子にも，同様の考えを適用するというアイディアが基礎となりました．例えば電子の内部振動と，その随伴波の位相が一致すると考えてみるわけです．こうなると，本来物質粒子であるはずの電子に関して，それを波動的に扱うための「振動数」を考慮する手続きが得られたことになり，そこから，やや複雑な過程は辿りますが，同じように「振幅」も考慮できるようになりました．

$$\lambda = \frac{h}{mv}$$

として知られるド・ブローイの公式は，それを表現したものです．この式が意味することは，振幅 λ という純粋に波動像のなかの概念が，運動量（質量と速度の積）という完全に物体に関する概念と置き換えられる（あるいはその逆）という，ある意味では画期的な論点でありました．ここには「物質波」という概念が示されているのです．すでに見たように，アインシュタインは，光の波動性を土台にしながら，エネルギーの不連続性という量子論の主張を利用することで，それを粒子像的なものに読み替えることを試みました．ド・ブローイは，逆に物質の粒子性を土台にしながら，量子論的な手法を利用することで，波動像的なものに読み替えることを試みたことになります．ただ，ハイゼンベルクは，この方向が全く逆の二つの対照的な試みとは少し違って，電子の運動を記述する際に，通常の力学が問題にする軌道という概念にたよることを諦め，量子論のお膳立て（対応原理も含めて）によって，それを果たそうとして，新しい運動力学の基礎に至ったと考えられます．

5. 新たな力学体系

さて，ド・ブローイがこうした着想を発表したのは，ちょうどハイゼンベルクがコペンハーゲンにボーアの許を訪ね，行列的な手法を基礎に「量子力学」という概念に辿りついた時期とほぼ重なっています．実にこの1924年は，全く違った出発点から，ハイゼンベルクとド・ブローイとが，画期的なアイディアをひっさげて，量子論の世界に登場してきたのです．しかも，驚くべきことに，出発点の違うこの二つのアイディアが，結局は同じことを主張していたのだということが，徐々に判ってきたのですから，この物語は，まことに興味深

いと言わなければなりません．

ただ，ド・ブローイ流の着想の仕上げにはもう一人の巨人が必要でした．それがエルヴィン・シュレーディンガーです．シュレーディンガーは，**気体分子運動論**という独特のジャンルを切り開いた天才ルートヴィッヒ・ボルツマンの伝統の残る（ボルツマンは20世紀初頭に不幸な死に方をしましたが）ウィーン大学で学んだ物理学者です．その頃アインシュタインは，サティエンドラ・ナット・ボーズというインドの研究者のアイディアに基づいて，理想気体のエネルギー問題を追求し，ド・ブローイの物質波との関連を示唆する結果を得ていました．シュレーディンガーは，このアインシュタインの試論に触発されて，気体の分子をド・ブローイの**物質波**で直接表現することを思いつきます．この成果は，1925年に発表されますが，シュレーディンガーは，さらにこの着想を一般化しようと試みます．この試みは，ボーアらの量子論（そして，その延長にあると思われるハイゼンベルクの新しい「量子力学」）が前提として強く要請してきた「非連続性」（数学的に言えば，「行列」のように整数的な手法によって初めて表現できる特性）を出発点としない，しかも，これまでの量子論が主張する非連続的な整数性を導出できるような数学的な表現を探し当てたのです．それが1926年に発表された「固有値問題としての量子化」という表題の画期的な論文になりました．彼は，この論文の中で，自らの数学的表現を使って，水素原子を実例として，ボーアの量子的な原子モデルをそのまま導出して見せたのです．この数学的表現こそが，現在「シュレーディンガー方程式」（時間を含まない）と呼ばれているものに他なりません．

シュレーディンガーは，その後の展開の中で，自らの力学を「波動力学」と呼ぶようになります．ここでは二乗して初めて観測にかかる量となるような，数学的な項が重要な役割を果たすことになるという点で，従来の力学公式とはかなり異なった性格を持ちますが，それでも，ニュートンの運動法則が，「連続的な」微分方程式の形で書かれる，という伝統の延長上にある定式化なので，多くの物理学者たちは，この公式が発表されると，ボーア＝ハイゼンベルク流の表現よりも，シュレーディンガー方程式を好むようになりました．今でも，物理学者は，ほとんど，こちらの表現を使って計算をし，あるいは，アイディアの表現をする習慣があります．

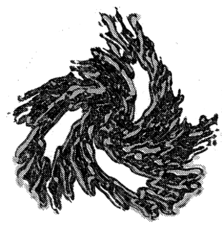
しかし，逆に見れば，二つの異なった着想から生まれ，異なった数学的表現を用いた二つの「量子力学」の実体が，実は，結果としては同じものであることが明らかになった，という点で，この1925年から26年にかけての物理学における歴史的な展開は，文字通り，「歴史的」な意味を持つことになりました．この時期をもって，少なくともミクロな世界（英語ではむしろ〈subatomic level〉という言葉を使うことが多いかもしれませんが）において成立している力学は，古典的なニュートン力学ではなく，「量子力学」であることは，確実なものになりました．

もっとも，そうなってみると，一連の厄介な問題が新たに姿を現します．マクロな世界，つまりニュートン力学が成り立つ世界と，ミクロな世界との間の橋渡しは，一体どうなるのか．私たちの観測にかかる世界は，常にマクロな世界であるのに，その切れ目が明らかにならない以上，力学的な実験の意味を，どのように考えるべきか．こうした難問が次々に現れたのです．しかし，それはまた別の物語になるでしょう．

（むらかみ・よういちろう，東洋英和女学院大学）

特集／ハイゼンベルク

不確定性原理の発見



小澤 正直

1. はじめに

ハイゼンベルク[1]は，1927年に量子力学の基本原理として有名な「不確定性原理」を提唱し，量子力学という革命的な物理学の発見者としての地位を不動のものとした．ハイゼンベルクの定式化による不確定性原理は，位置と運動量のように互いに共役な物理量 Q, P を同時に正確に測定することはできず，それらの測定誤差 $\epsilon(Q), \epsilon(P)$ の積はプランク定数 h 程度の大きさに留まる，つまり，

$$\epsilon(Q)\epsilon(P) \geq \frac{h}{4\pi} \qquad (1)$$

という関係があるというものである．ただし，上式の右辺の値は，後にケナード[2]の研究で明らかにされたものを採用した．このことから，ハイゼンベルクは，量子力学においては，ニュートン力学で成り立っていた因果律，ラプラスの悪魔のたとえで有名な言い方に従えば，「過去の状態を完全に知れば，未来の運動をすべて知ることができる」という決定論的な世界観がもはや成り立たないことを結論した．つまり，過去の状態を完全に知ることができるという前提がもはや成り立たないので，未来の運動を確実に予言することはできない．このような結論から大きな社会的影響を与えた基本原理ではあるが，しかし，その定量的表現を巡り，不確定性原理の正当性には教科書の記述においてさえも曖昧な部分が残されていた．本稿では，この不確定性原理の発見の歴史的経緯，および，ハイゼンベルクの定式化の正当性を巡る最近の研究について解説を試みたい．

2. 行列力学と波動力学

ハイゼンベルクが，不確定性原理を発見した1927年は，量子力学が誕生して，その建設がまさに完成しようとしていた時期であった．ハイゼンベルクは，1923年にミュンヘン大学のゾンマーフェルトの指導の下で学位を取得し，その後，ゲッチンゲンでボルンの助手をしていた．

1900年のプランクの量子仮説の発見を契機にして，光と物質の相互作用に関して古典力学とは相容れない多くの仮説が現れた．それらを体系化する「量子力学」は，1925年のハイゼンベルクによる行列力学の発見によって生まれたが，翌1926年，シュレーディンガーは波動力学を発見し，両者は同等であることが示された．ハイゼンベルクは，極めて独創的な着想により，電子の軌道の遷移を計算する方法を発見し，ボルン，ヨルダン，ハイゼンベルクによって，行列力学として知られる初期の一貫した理論にまとめられた．

行列力学と波動力学の大きな相違は，行列力学が光および物質の粒子的描像に基づき，波動力学が波動的描像に基づいていると言えるであろう．これは，行列力学の正当性に対する大きな援護になったが，一方で，行列力学に特徴的である「量子飛躍」の概念は，不合理なものとして退けられ，

シュレーディンガーは,「自然は飛躍せず」という古典的な規範が量子力学において復活したと主張した．また，行列力学が当時まだ物理学者には目新しかった行列の計算を利用するのに対して，波動力学は微分方程式という物理学者になじみ深い強力な数学的方法を駆使して，同じ問題を鮮やかに解決することができた．そのため，ハイゼンベルクにとって困ったことに，既に行列力学で解決済みの問題でさえ，波動力学でやり直したとする論文が発表されるようになり，行列力学が無視される風潮が生まれつつあった[3)].

とりわけ決定的だったのは，1926 年の 7 月の終わり頃，ゾンマーフェルトに招かれたシュレーディンガーがミュンヘン大学で行った波動力学に関する講演に，ハイゼンベルクが出席したことだったとされる．そこで，シュレーディンガーは，水素原子の問題を例として，通常の数学的方法で見事に簡単に解決してみせた．これは，以前にパウリが行列力学で非常に複雑な方法でしか解けなかった問題であった．そのため，それに引き続く，シュレーディンガーによる波動力学の解釈も好意的に受け入れられた．ハイゼンベルクは，シュレーディンガーの解釈では，プランクの輻射の公式を全く理解できないと反論したが，ミュンヘン大学の実験物理学者ヴィーンによって「今や，シュレーディンガーが量子飛躍の不合理さをはっきり証明し，そうした観念に基づく理論には終止符が打たれた．残された問題は，すべて波動力学によって解決されるであろう」と切り返されてしまった[4)].

ハイゼンベルクは，量子力学におけるこの 2 つの解釈の対立を解決するために，1926 年 7 月から 1927 年 3 月まで，量子力学の解釈の問題を集中的に研究し，そこから「不確定性原理」が生まれた．その間の展開は次のようにまとめられる[5)].

(1) ミュンヘンでのシュレーディンガーの講演の後，ハイゼンベルクは，行列力学に戻り，波動力学を用いるほうが簡単な場合も波動力学を用いないで原子物理の問題を扱うよう努めた．

(2) ハイゼンベルクは，波動力学を強硬に拒否したため，コペンハーゲンにおいて，孤立する．

(3) パウリは，ハイゼンベルクに共感し，文通によってハイゼンベルクが不確定性原理の発見に至る概念的分析に協力した．

(4) ハイゼンベルクは，ディラックと積極的に交流し，変換理論の完成に協力し，ディラックからデルタ関数を用いる計算を学んで，波動力学から行列力学への翻訳を容易にした．

(5) 1926 年 10 月から 1927 年 2 月まで，ハイゼンベルクとボーアは量子論の解釈に関する議論を続けた．

(6) 1927 年 2 月，ハイゼンベルクは，位置と運動量の同時測定の問題を研究し，ガンマ線顕微鏡の思考実験に思い至り，位置と運動量の標準偏差の積に関する不等式をディラック・ヨルダンの理論から導き，不確定性原理に至る．

3. コペンハーゲン

ハイゼンベルクは，1926 年 5 月にコペンハーゲンでボーアの助手に就任した．その直前，ハイゼンベルクは，ベルリン物理学コロキウムで行列力学に関する講演をし，講演後にアインシュタインと討論する機会を得た．その際，ハイゼンベルクが，理論の前提として電子の軌道という概念を放棄して，軌道の遷移の際の輻射のような観測可能な量のみに基づいて理論を構築すると言う企てをアインシュタインは批判し,「理論があって初めて何が観測可能かが決まる」と述べたことが，後に，不確定性原理の発見に大きな影響を与えた．

ハイゼンベルクは，夏期休暇中にミュンヘンに帰省して，ゾンマーフェルトのもとに立ち寄り，シュレーディンガーの講演を聴講した．その報告がきっかけとなってボーアはシュレーディンガーを 9 月中に 1，2 週間，行列力学および波動力学の解釈について徹底的に討論するためにコペンハーゲンに招待した．そこで，ボーアは，波動関数が実在の波であるとするシュレーディンガーの解釈では，プランクの公式が示す量子飛躍を説明できないことを主張し，量子飛躍を捨て去ろうとする

シュレーディンガーとは，物別れに終わった．議論に疲れたシュレーディンガーは，風邪で発熱してしまい，ボーア夫人に看病されながら，ボーア家のベッドに伏せてしまったが，ボーア自身は，その枕元で議論をやめなかったという．

それから数カ月，ハイゼンベルクとボーアの間では，量子力学の物理的解釈が対話の中心となった．ボーアのアプローチは数学より直観的明晰さを求め，ハイゼンベルクのアプローチは数学的明晰さを前提とする点で異なっていた．ボーアは，粒子像と波動像という直観的描像を前提にし，それらの描像が排除し合うが，両者を一緒にして完全な記述が可能になると言うシナリオを描いていたのに対して，ハイゼンベルクは，波動像を出発点の一つにすることを好まず，量子力学が既に扱っているいくつかの物理量の解釈から出発して，一般的な解釈を発見したいと望んでいた．両者の討論が行き詰まった1927年の2月に，気分転換のためにボーアはノルウェーへのスキー旅行に旅立った[4)]．

波動力学を拒否してコペンハーゲンで孤立していたハイゼンベルクは，1926年10月から11月にかけてパウリと文通をして，不確定性原理へ至る道を開きつつあった．パウリは，その中で，波動関数の確率解釈や，交換関係

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i} I \tag{2}$$

から波動関数の Q 表示と P 表示の関係がフーリエ変換になることなどについての萌芽的考えを示唆し，それらから，P が確定する場合には，Q が全く不確定になることなどが示唆された．これらの見方は，その後，ボルンによる波動関数の確率解釈とディラック・ヨルダンの変換理論という明確な数学理論として定式化された．とりわけ，ディラックは10月から12月に掛けてコペンハーゲンに滞在し，ハイゼンベルクと交流したことにより，ハイゼンベルクは，デルタ関数や変換理論を熟知することができた[5)]．

4. ファレ公園

ボーアがスキー旅行に出かけた後，コペンハーゲンに残ったハイゼンベルクは，一人で思索を深めることができた．ボーアと議論してきた典型的な問題の一つは，原子の中の電子の軌道が観測不可能とした量子力学の前提と，霧箱によって電子の軌跡が観測できることの矛盾であった．これはそもそもベルリンでアインシュタインに問われた問題でもあった．ある夜半，アインシュタインとの対話を突然思い浮かべ，「理論があって初めて，それが何を観測できるかということを決定する」という意見を思い出した．その帰結を考えるために，すぐに研究所の隣のファレ公園に真夜中の散歩に出かけた．そこで，実は，霧箱中の電子の軌道は，ある限られた正確さの下でしか観測されていないことに気がついた．従って，正しい設問は，矛盾の解消ではなく，量子力学で許される状態において，ある程度の不正確さである位置を占め，ある程度の不正確さで速度の値を持ち，その不正確さ，つまり，ゆらぎの程度を実験と矛盾しないようにできるだけ小さくするとしたら許容できる関係は何であろうかということになった．研究所に戻ると，ディラック・ヨルダンの変換理論の公式を利用して，その関係を計算で求めることができた[4)]．

これは，量子状態における位置と運動量の標準偏差がみたす不等式で，位置と運動量の標準偏差の大きさの積はプランクの作用量子より小さくなり得ないことを示していた．ハイゼンベルクは，1927年の論文[1)]では，この関係をガウス型の波動関数についてのみ証明し，一般の場合の証明はケナード[2)]によって与えられた．そこで，任意の状態において位置と運動量の標準偏差 $\sigma(Q), \sigma(P)$ がみたす関係

$$\sigma(Q)\sigma(P) \geq \frac{h}{4\pi} \tag{3}$$

は，ケナードの不等式と呼ばれる．

ハイゼンベルクは，いかなる測定も，その直後の状態は量子力学で仮定される波動関数を持つこと

を理論の前提とすべきと考えた．そこで，いかなる測定もその直後の状態がケナードの不等式 (3) をみたすことから，いかなる位置と運動量の同時測定も，それらの測定誤差 $\epsilon(Q), \epsilon(P)$ は，ハイゼンベルクの不等式 (1) を満たすと結論した．ハイゼンベルクは，このことによって「理論によって何が観測可能かが決められた」と感じた．ただ，ケナードの不等式 (3) から無条件でハイゼンベルクの不等式 (1) が導かれるかどうかは異論があるので，後述する．

翌日から，ハイゼンベルクは，簡単な実験の場合に個別的に計算することに着手した．ここで，かつてのゲッチンゲンでの学友，ドゥルーデとの対話の記憶から，ガンマ線顕微鏡の思考実験を思いついた．ドゥルーデは，原子の中での電子軌道の概念の困難に関する討論の際に，ガンマ線顕微鏡のように異常に高い分解能をもつ顕微鏡による測定の可能性を示唆していた．ハイゼンベルクは，そのような装置によっても，不確定性原理 (1) による制約を越えることは許されないことを示すことができた[4]．

もっとも，ハイゼンベルクにとって顕微鏡の分解能については，苦い思い出があったはずである．学位取得の際の物理学の口述試験の試験官の一人であったヴィーンは，ハイゼンベルクが実験の課題で用いたファブリー・ペロー干渉計の分解能について質問した．実験物理より理論物理に熱中していたハイゼンベルクが答えられないのを見て，ヴィーンは「それでは，顕微鏡の分解能は？」,「望遠鏡の分解能は？」と畳み掛けたので，もう一人の試験官であるゾンマーフェルトが満点を出さなければ，落第するところであったそうだ[3]．

5. 不確定性原理の正当性

ハイゼンベルクの不確定性原理の正当性について，「不確定性原理は，ガンマ線顕微鏡の思考実験で得られたのであり，そもそも一つの思考実験で成り立つ関係が普遍的な法則の地位を持つはずがない」という意見を聞くことがある．しかし，実は，ハイゼンベルクは，1927 年の論文[1]で，ガンマ線顕微鏡の思考実験で不確定性原理 (1) を導いたすぐ後で，「この関係は，交換関係 (2) の直接の数学的帰結である」と書いている．ハイゼンベルクは，同論文の後の部分で，実際に不確定性原理 (1) の数学的証明を試みている．

前述のように，ハイゼンベルク[1]は，式 (3) を任意のガウス型波動関数に対して証明しているが，ハイゼンベルクの論文[1]の出版後，ケナード[2] は，この関係を任意の波動関数について証明した．後に，ケナードの不等式 (3) は，ハイゼンベルクの不等式 (1) の形式的表現であるとしばしば説明されるようになった．しかし，ハイゼンベルクの議論を仔細に検討すると，式 (3) は式 (1) を一般的には導かないことがわかる．というのは，ハイゼンベルクの議論は，他に付加的な条件を暗黙のうちに仮定しているからである．ケナードの不等式 (3) がハイゼンベルクの不等式 (1) の形式的表現であるという説明は，その仮定を無視していることになる．

実際，ハイゼンベルクの議論は，次の二つの条件を仮定していると考えられる[6]．(H1) 誤差 $\epsilon(Q)$ をもつ測定は，波束の収縮により測定後の Q の標準偏差 $\sigma(Q)$ を $\epsilon(Q)$ 以下に変化させる．(H2) 誤差 $\epsilon(Q)$ と擾乱 $\eta(P)$ は，測定直前の状態に依存しない．ただし，ここでは，運動量の誤差 $\epsilon(P)$ は，位置の測定によって不可避的に引き起こされるものを考え，それを擾乱 $\eta(P)$ と呼ぶ．仮定 (H1) から $\epsilon(Q) \geq \sigma(Q)$ が成り立つ．仮定 (H2) の下では，一般性を失うことなく，測定直前の状態における運動量が十分に小さいと仮定することができる．すると，測定直後の運動量はすべて測定による運動量変化で得られたと考えられるから，$\eta(P)^2 = \langle P^2 \rangle \geq \sigma(P)^2$，が成り立つ．ここで，$\langle \cdots \rangle$ および σ は，測定直後の状態における平均値と標準偏差を表す．従って，仮定 (H1), (H2) から，測定直後の状態における標準偏差 $\sigma(Q), \sigma(P)$ について，$\epsilon(Q) \geq \sigma(Q)$ かつ $\eta(P) \geq \sigma(P)$ が成り立ち，測定直後の状態に式 (3) を適用すると，式 (1) が導かれる．

上の議論から明らかなように，ハイゼンベルクは，標準偏差の関係 (3) と誤差の関係 (1) を混同していたのではなく，測定直後の状態が関係 (3) をみたすことから，誤差の関係 (1) が帰結すると主張したのであるが，その推論は不十分であった．

一方，ハイゼンベルクの不等式 (1) が成立しない測定モデルの存在は，重力波の検出限界を巡る論争を通して明らかになった．1980 年に，ブラジンスキー，ヴォロンツォフ，ソーン[7]は，干渉計型検出器のように自由質点の位置を監視することにより重力波の検出を行なう検出装置には，不確定性原理 (1) に由来する感度の限界が存在すると主張すると共に，量子非破壊測定法という新たな測定方法が有効で，そのような感度限界の存在しない共振器型検出器による検出プロジェクトを推進していた．この感度限界は，標準量子限界と呼ばれ，広く受け入れられた．しかし，1983 年にユエン[8]は，標準量子限界の導出に不備があることを指摘し，測定後の状態を収縮状態と呼ばれる状態に変化させる収縮状態測定法という新たな測定法を提案し，それによって，標準量子限界が打破可能であると主張したため，その正否を巡り論争が起こった．

1985 年にケーブス[9]により標準量子限界の定式化が精密化され，収縮状態測定法が，必要とされる高い測定精度を持つかどうかが疑問視されたことにより，論争の焦点は，測定精度の高い収縮状態測定が物理的に可能であるか否かに絞られた．そのような測定は，前述のハイゼンベルクの仮定 (H1) をみたさないので，不確定性原理 (1) と矛盾すると考えられた．筆者は，1984 年に物理的に実現可能な量子測定の数学的特徴付けを得て[10]，量子測定理論の構築に取りかかっていたが，新しい理論をこの論争に適用することにより，1988 年に誤差のない収縮状態測定が可能であることを示して，この論争を解決することができた[11,12]．また，この量子測定理論に基づいて，不確定性原理に対する曖昧さのない厳密な定式化を与える研究において，この誤差のない収縮状態測定は，不確定性原理 (1) を打破することも直接示された[13]．つまり，そもそも不確定性原理 (1) 自体が正しくなかったため，標準量子限界の存在はその根拠を失った．

このように，今日では，式 (1) で示されるハイゼンベルク限界は，理論的には打破可能な限界であると考えられている[14]．しかし，このことは「量子力学」が破綻していることを意味しない．「ハイゼンベルク限界」は，「量子力学が理論的に導く，量子力学における測定の限界」を目指したが，「量子力学から理論的に導く」ための論理的過程にギャップがあったのである．しかし，たとえ，式 (1) が打破可能であるとしても，ハイゼンベルクが本来目指した，量子力学の理論が自ら示すところのどのような測定によっても破ることのできない測定の普遍的限界は，存在するはずである．それは，どのように定式化されるであろうか？ また，ハイゼンベルク限界が打破されることは，実際に実験で直接的に検証することができるのであろうか？

6. 新しい不確定性原理と実験的検証

2003 年に筆者は次の新しい不等式を提案し，それが物理的に実現可能な任意の測定装置について普遍的に成立することを量子力学から理論的に証明した[15,16]：

$$\epsilon(Q)\epsilon(P)+\epsilon(Q)\sigma(P)+\sigma(Q)\epsilon(P)\geq\frac{h}{4\pi}. \quad (4)$$

ここで，$\sigma(Q),\sigma(P)$ はそれぞれ測定直前の状態における標準偏差を表す．この不等式は，今日では「小澤の不等式」と呼ばれることがある．

この定量的表現では，標準偏差 $\sigma(Q)$ または $\sigma(P)$ が無限大ならば，測定誤差 $\epsilon(Q),\epsilon(P)$ を共に無限小にできるので，位置と運動量が正確に同時測定可能な例外的な場合が許容されている．実はそのような可能性は，以前から知られていた．それは，アインシュタイン，ポドルスキー，ローゼンによって発見された EPR のパラドックスに関連して，シュレーディンガーによって指摘された[17]．つまり，シュレーディンガーは，2 粒子系のいわゆる EPR 状態において，粒子 1 の位置と粒子 2 の運動量を同時に測ることによって，粒子

1 の位置と運動量の同時測定が可能であるということを指摘したのである．小澤の不等式では，このような例外的な場合についても，両者の誤差の定量的関係を正しく表現している．不確定性原理の定性的表現としては，「位置と運動量は正確な同時測定が不可能である」という主張の前に「位置と運動量の標準偏差がともに有限な状態においては」という但し書きが必要である．

ハイゼンベルク限界 (1) が打破されることを，実際に実験で直接的に検証することができるのであろうか？ 残念ながら，そのような実験にはまだまだ多くの困難が残されている．しかし，それに向けて確実な一歩が踏み出されているので，それについて解説しよう．

そのために，ケナードの不等式 (3) を一般化したロバートソンの不等式を紹介しよう．ケナードは，彼の不等式を Q-表示と P-表示の間のフーリエ変換の性質を利用して証明したが，数学者のワイルは，線形代数でよく知られたシュヴァルツの不等式を用いると簡単に証明できることを自身の著書で解説した．その本の翻訳を担当した物理学者のロバートソンは，更に，シュヴァルツの不等式を用いることにより，任意の物理量 A, B の間に不等式

$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \tag{5}$$

が成り立つことを示した．ここで，$[A, B]$ は交換子 $AB - BA$ を表し，$\langle\cdots\rangle$ は所与の状態における期待値を表す．これは，ロバートソンの不等式と呼ばれている．$A = Q$ かつ $B = P$ の場合は，交換関係 (2) から右辺の値が $\frac{h}{4\pi}$ となり，ケナードの不等式 (3) に帰着する．

小澤の不等式 (4) についても，任意の物理量 A, B の同時測定の誤差 $\epsilon(A), \epsilon(B)$ に関する不等式

$$\epsilon(A)\epsilon(B) + \epsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\epsilon(B) \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \tag{6}$$

に一般化される．$A = Q$ かつ $B = P$ の場合に式 (4) に帰着することは明らかであろう．

ここで，「同時測定」という言葉は，もちろん，2 つの物理量 A, B を「同時に」測定することを含んでいるが，必ずしも，そのことだけを意味しているわけではなく，むしろ，「同時刻」の A, B の値をそれぞれ測定することを意味している．例えば，時刻 $t = 0$ における物理量 A, B の同時測定には，時刻 $t = 0$ において，物理量 A を測定し，すぐ引き続いて物理量 B を測定するというケースも含まれている．この場合，物理量 B を誤差のない測定装置で測定したとしても，時刻 $t = 0$ における物理量 B の測定には誤差が現れる．それは，物理量 A の測定の過程で物理量 B が乱されるからであり，この場合の誤差を特に擾乱と呼んで $\eta(B) = \epsilon(B)$ と表すことがある．例えば，ガンマ線顕微鏡の思考実験で，電子の位置 Q と運動量 P の同時測定を考える場合は，位置の誤差 $\epsilon(Q)$ は，顕微鏡の分解能に対応し，運動量 P の誤差は，位置の測定に伴う運動量の擾乱 $\eta(P)$ を意味する．

以上から，物理量 A の測定誤差 $\epsilon(A)$ とそれに伴う物理量 B の擾乱 $\eta(B)$ の間には，常に

$$\epsilon(A)\eta(B) + \epsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2}|\langle[A, B]\rangle| \tag{7}$$

という関係が成り立つ．この関係の簡単な場合として，A, B がスピン $\frac{1}{2}$ の粒子のスピンの x 成分 S_x と y 成分 S_y の場合を考えよう．スピン $\frac{1}{2}$ の粒子のスピンの 3 成分 S_x, S_y, S_z は，それぞれ，$\pm\frac{h}{4\pi}$ という 2 つの異なる値を持つ物理量である．右辺の値がもっとも大きくなるように，測定直前の状態が $|S_z = \frac{h}{4\pi}\rangle$ の場合を考えると，小澤の不等式は

$$\epsilon(S_x)\eta(S_y) + \epsilon(S_x)\sigma(S_y) + \sigma(S_x)\eta(S_y) \geq \left(\frac{h}{4\pi}\right)^2 \tag{8}$$

という形になる．一方，誤差と擾乱が反比例関係にあるハイゼンベルク型不等式は，この場合には，

$$\epsilon(S_x)\eta(S_y) \geq \left(\frac{h}{4\pi}\right)^2 \tag{9}$$

という形になる．A, B が位置 Q と運動量 P の場合は，それぞれのとりうる値が連続無限個であったのと比べると，A, B が2つの値しかとらないこのケースは極めて単純化された状況であると言えよう．

そこで，任意のパラメータ $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ に対して，$\cos\phi S_x + \sin\phi S_y$ という物理量の射影測定を行う装置を考えると，この装置の誤差と擾乱は，

$$\epsilon(S_x) = \frac{h}{2\pi}\sin\frac{\phi}{2}, \tag{10}$$

$$\eta(S_y) = \frac{\sqrt{2}h}{4\pi}\cos\phi \tag{11}$$

となることが理論的に導かれる．これから，ハイゼンベルク型不等式 (9) の左辺を計算すると

$$\epsilon(S_x)\eta(S_y) < \left(\frac{h}{4\pi}\right)^2 \tag{12}$$

となって，ハイゼンベルク型不等式 (9) が常に不成立であることがわかる．

そこで，実験によって $\epsilon(S_x), \eta(S_y)$ を実際に計測することができれば，ハイゼンベルク型不等式 (9) が実際に反証されたことになる．このようにして，ハイゼンベルク型不等式 (9) が成立しない実験的状況を理論的に見出すと言う問題は解決した．ところが，ここにもう一つの問題があった．それは，誤差や擾乱の計測方法である．

一般に，誤差は真値と測定値の差で決まるとされるが，量子力学では，2つの物理量 X, Y の値の差を測ることが一般には不可能である．つまり，X, Y が非可換ならば，X の値を測ることにより，Y の値が乱されてしまうので，X の値と Y の値を測定して差をとっても，$X - Y$ の値が得られないからである．筆者は2004年にこのような困難を解消して，誤差と擾乱を計測する方法を発見した[16]．その方法では，一つの状態における誤差または擾乱を計測するのに，他に2つの状態を生成する必要があるので，「3状態法」と呼ばれている．

これらの理論的準備が整った頃，筆者は，ウィーン工科大学において中性子を用いた量子力学の基本原理の検証実験で10年以上の実績を持つ長谷川祐司氏と知り合い，中性子のスピンによって小澤の不等式 (8) とハイゼンベルク型不等式 (9) の対照実験を行う共同研究を開始した．幸いなことに実験は順調に進み，本年1月に論文発表の運びとなった[18]．これによって，ハイゼンベルクの不確定性原理を任意の物理量に一般化した定式化の破れを，世界で初めて観測することに成功した．元来の定式化である，位置と運動量の場合に破れを直接，観測することは，現在の実験技術では難しいと考えられているが，量子測定理論の進歩により，近い将来，技術的困難を解消する新しい方法がみつかることを期待して，筆を置くことにしたい．

参考文献

1) W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43**, 172 (1927).
2) E.H. Kennard, *Z. Phys.* **44**, 326 (1927).
3) D.C. Cassidy, *Uncertainty: the life and science of Werner Heisenberg* (W.H. Freeman, New York, 1992).
4) W. Heisenberg, *Der Teil und das Ganze: Gespräche im Umkreis der Atomphysik* (Piper, München, 1969).［W. ハイゼンベルク著，山崎和夫訳，『部分と全体：私の生涯の偉大な出会いと対話』，(みすず書房，東京，1974)］.
5) J. Mehra, H. Rechenberg, *The Historical Development of Quantum Theory*, Vol. 6, Part 1 (Springer, New York, 2000).
6) M. Ozawa, *Phys. Lett. A* **318**, 21 (2003).
7) V.B. Braginsky, Y.I. Vorontsov, K.S. Thorne, *Science* **209**, 547 (1980).
8) H.P. Yuen, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 719 (1983). [see also *ibid.* p.1603].
9) C.M. Caves, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2465 (1985).
10) M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **25**, 79 (1984).
11) M. Ozawa, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 385 (1988).
12) J. Maddox, *Nature* **331**, 559 (1988).
13) M. Ozawa, *Phys. Lett. A* **299**, 1 (2002).
14) V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, *Science* **306**, 1330 (2004).
15) M. Ozawa, *Phys. Rev. A* **67**, 042105 (2003).
16) M. Ozawa, *Ann. Phys. (N.Y.)* **311**, 350 (2004).
17) E. Schrödinger, *Naturwissenshaften* **23**, 807 (1935).［E. シュレーディンガー著，井上健訳，「量子力学の現状」，『世界の名著 66』(湯川秀樹，井上健編)，(中央公論社，東京，1970) pp.357–408］.
18) J. Erhart, *et al.*, *Nature Phys.* **8**, 185 (2012).

(おざわ・まさなお，名古屋大学大学院情報科学研究科)

ハイゼンベルクの訪日

江 沢 洋

ハイゼンベルクはディラックと手を携えて 1929 年 9 月に初来日した．仁科芳雄の尽力と，そしてなによりも彼がコペンハーゲンのニールス・ボーア研究所で培った深い友情による．前年の 12 月に帰国していた仁科は，年を越えた 4 月にシカゴ滞在中のハイゼンベルクに手紙を送っている[1]：

> 昨年の 9 月，コペンハーゲンで日本訪問についてお話になりました．その後，旅行の日程がきまったら知らせるとのお手紙をいただきました．こちらでは長岡教授とも相談しました．御帰国の途中，日本に立ち寄って下されば大喜びです．
>
> 日本の物理学はあまり強力でないので興味はないでしょうが，しかしこの国は独特ですので興味をもっていただけると存じます．

長岡半太郎も準備を進めていた．財団法人・啓明会の理事からの手紙がある[2]．「過日お話の外国学者講演開催の件につき鶴見常務理事に協議候ところ賛成と申居られ候．但し経費はなるべく切つめて総額 2500 円を越えざる様にし度….」

この金額では不足であると仁科が長岡に訴えている手紙や，それに対する返事[3]もある．

ハイゼンベルクとディラックの講演に向けて藤岡由夫ら若手は勉強会を続けた．仁科は欠かさず出席し論文の難解な個所を懇切に説明した[4]．講演の初日，長岡半太郎は歓迎の演説をした[5]：

> 両博士が，これほどの若年で理論物理学の未踏の道に踏み出したことは讃嘆すべきです．日本の大部分の学生たちは試験のために詰め込み勉強をし講義ノートを手探りしています．しかし人生の花からいかに豊かな研究の実りが生まれるかを考えれば，学生たちも自身の研究に強い衝動を感じずにはいないでしょう．

このとき長岡は「ハイゼンベルク先生」と言ったと曽根武は回想している．長岡は日頃「他人に頭を下げるのは大嫌いだが，偉い仕事をしたら，たとえ弟子であっても先生とよぶ」といっていたので，曽根は「とうとう言ったな」と思った[6]．

ハイゼンベルクの講演は次の題で行われた：

9 月 2 日　電気伝導の理論（ブロッホの仕事）
3 日　不確定性関係と量子論の物理的原理
4–5 日　量子論における遅延ポテンシャル
6–7 日　強磁性の理論

このうち「量子論における遅延ポテンシャル」というのは「波動場の量子論」と題するパウリとの共著論文の仕事で量子電磁力学の嚆矢となったものである．論文の I が 1929 年 3 月 19 日の受理，II が 9 月 7 日（！）の受理となっているから，できたての仕事である．「強磁性の理論」は 1928 年の論文で交換相互作用の存在を指摘した．朝永振一郎が『スピンはめぐる』でちょっと触れている[7]．

ディラックの講演もあげておこう：

9 月 2 日　統計的量子力学の基礎
3 日　重ね合わせの原理と 2 次元調和振動子
4–5 日　多電子系の量子力学
6–7 日　電子の相対論的理論

「統計的量子力学の基礎」というのは，多体系ではなく一つの系の統計的な扱いにおいて量子力学と古典力学

の間に対応関係が見られることを示した1929年の論文.「重ね合わせの原理と2次元調和振動子」は重ね合わせの原理が量子力学にとって基本的であり，古典力学における同名の原理といかに違っているかを説明したもので，1930年に出版される—したがって，この講演のときにはまだ書いている途中の？—『量子力学』[8]の第1章をなす.「多電子系の量子力学」は，多電子系の波動関数が電子の位置座標とスピンの置換に関して反対称であることによって位置座標の交換をスピン演算子で表わし，エネルギー準位の縮退（多重項）を論ずるもので，1929年の論文でもあり『量子力学』初版の第XI章にもなっている．第4版では第IX章である．さきにあげた朝永の『スピンはめぐる』の第5話[7]にも深い関係がある．

「講演の通知が理化学研究所から日本中の大学に配られた」ので「京都から東京へわざわざでかけていったんです」と朝永はいい，「これらの講義内容は，すでに雑誌に出ていたのを読んでいましたので，それほど難解だとは思わず，だいたいわかったような気がしました」といっている[9]．加えて「この当時としては非常に画期的だと思ったのは，この講演を東京が独占しなかったこと．講演会に日本中の大学を招待したのは理化学研究所という機関が大学のような閉鎖的なやり方をしていなかったことを示す顕著な例です」といっている.「独占しなかった」のは講演だけではなかった．講演の記録が小谷正雄・犬井鉄郎の助力を得て仁科芳雄訳述『量子論諸問題』(1932) にまとめられ全国の大学の希望者に配られた．たとえば京都大学に13冊，大阪の塩見研究所に4冊が送られている[10]．大阪大学がないが，この大学に理学部ができたのは1933年4月である．

話が前後したが，犬井鉄郎はハイゼンベルクについて「満面紅潮し，ハチキレるような元気に満ちて」いたと言っている．講演の第1日は非常に蒸し暑い日だった．長身痩躯のディラックは，貴賓用の椅子にすわることは拒み一般聴衆と一緒にハイゼンベルクの講演を聴いていたが，旅の疲れからか長い体がだんだん前に崩れていった．そのとき，ハイゼンベルクはシュレーディンガー方程式を定数変化の方法で解く方法を説明し「ディラック博士がこの方法を量子力学に…」と叱咤した！ その瞬間，ディラックはピクッと身を起こした[11]．

こんなこともあった．ハイゼンベルクが「遅延ポテンシャル」の講演の中で補助条件 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}=0$ に触れたとき，ディラックが演算子 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ のスペクトルは離散的か連続的かと質問した．虚をつかれたハイゼンベルクは一瞬とまどったが—さて，それからどうしたか聞いたはずだが忘れてしまった．

こんな話もある．9月4日だったか，ツェッペリン飛行船が東京に姿を現すはずだった．犬井たちは大学図書館の屋上で待っていた．

> ツェッペリンの銀青の巨体が迫ってきた．ハイゼンベルクは屋上の一段高くなった突き出しのテッペンに身を乗り出して嬉々として興じていたが，ツェッペリンが近づいてくると一寸でも高いところをと見回して，ほんの3，4寸ばかり高い石の上に延び上がって，中心をとりながら「ツェッペリン伯爵！」とか何とか叫んだ[11]．

この後，ディラックはなお何度か日本に来ている．ハイゼンベルクは戦後まで来日こそしなかったがライプチヒに日本から留学生を何人も迎えた．

参考文献

1) 中根良平・仁科雄一郎・仁科浩二郎・矢崎裕二・江沢洋編『仁科芳雄往復書簡集 I』，みすず書房 (2006), p.128.
2) 『仁科書簡集』，前掲[1]，p.133.
3) 『仁科書簡集』，前掲[1]，pp.157, 159, 160.
4) 犬井鉄郎,「高校通信・東書[物理]」, No.**191** (1981).
5) 『仁科書簡集』，前掲[1]，p.163.
6) 勝木渥『量子力学の曙光の中で』, 星林社 (1991), p.93.
7) 朝永振一郎『スピンはめぐる』，みすず書房 (2008), 第5話.
8) ディラック『量子力学』第4版，朝永振一郎ほか訳，岩波書店 (1968).
9) 朝永振一郎『量子力学と私』, 江沢洋編, 岩波文庫 (1997), pp.30–31.
10) 『仁科書簡集』，前掲[1]，pp.243–244.
11) 犬井鉄郎「岩波講座・物理学, 月報」(第**10**号), 1939年9月.

（えざわ・ひろし，学習院大学名誉教授）

特集／ハイゼンベルク

ハイゼンベルクと音楽



亀 淵 迪

アインシュタインのヴァイオリン，プランクのオペレッタ（作曲），ボルンのピアノ，等々，高名な理論物理学者で音楽を愛でた人は多い．ハイゼンベルクもその一人で，1967年来日の折にはピアノ演奏を披露したので，ご存知の方も多いかと思う．私の友人でウィーン大のW. ティリングに至っては“若い頃かのウェーベルンに作曲を教わり，いまでも時間の半分を物理（フィジーク）に，半分を音楽（ムジーク）に充てている”との由．実際，私も彼の自作自演のオルガン演奏会をある教会で聴いたことがある．こうなってくると，音楽は趣味の域を超える．

さてハイゼンベルク，幼少の頃からピアノを弾かされていたらしい．やはり大学教授だった父親が強くてよい声の持主で，家でよくオペラのアリアやドイツ・リードを歌っていて，その伴奏をさせられたのである．そのために父親が奏法の初歩的な手解きを授けたかと思われる．他にも多少レッスンを受けたらしいが，確かな記録はないという．

このような環境に育ったので，少年時代には友人たちと室内楽演奏を楽しむようになる．ある日のこと，友人の家でシューベルトのロ短調トリオの練習をしていたが，彼等が頻りに“君もプロのピアニストになれよ”と勧めるのに対し，ハイゼンベルク少年は次のように言い放った，と自伝『部分と全体』（第二章）にはある：“音楽界の現状を観るに，今世紀に至って十二音とか無調などといった変な音楽が現れ，そこには明るい未来があるとは到底思えない．これに反し物理学においては，さきに相対論が確立され，また量子論においても機は熟し，まさに革命前夜の予感がする．そこでは自分も何かができそうに思う”，と．

こうしてミュンヘン大に入学するのだが，当時の技量の程を示すのに格好な挿話が二つある．

その一：ある日のウィーン教授の学生実験でのこと，パウリに課せられたのは音叉の音の振動数測定．しかしそこへハイゼンベルクがやってきて原子物理の話を始めてしまい，気が付いたときには実験時間はなくなっていた．困ったパウリはハイゼンベルクの絶対音感をもとに振動数を算出し，急場をしのいだとか――ハイゼンベルクには生来，この感覚が具わっていたのである．

その二：ゲッティンゲンのボルン教授の下で修業していたある日のこと，教授が提案して二人でピアノの連弾を行った．モーツァルトとベートーベンのピアノ協奏曲を一曲ずつ，一人はソロ・パートを，他はオーケストラ・パートを担当した．おそらく二曲目では互いの役割を交換したことであろう．“とくにベートーベンのほうは初めての曲だったが，信じ難い程の美しさであった”と家族への手紙に書いている――この程度の曲なら軽く初見で弾けたということ．と同時にボルン教授の腕前の程も想像できる．とにかくこの頃のハイゼ

ンベルクは，古典派からロマン派に至るかなりのレパートリーをもっていたようである．

25歳でライプツィヒ大の教授となるが，生活も落ち着いた頃，ノーベル賞の賞金で立派なピアノ（Blüthner）を購入，さらに，かなり高名な音楽教師について初めて本格的なレッスンを受ける．ピアノ奏法の他にも音楽理論や作曲法をも学んだらしい．その結果，“楽譜を仔細に分析すると，そこには数学的な対称性にも似た構造がある”のを改めて確認する．そのことの説明のためにいつも引用するのが，ベートーベンのヴァイオリン協奏曲第一楽章の第二主題だったとか．この時期にはプロの音楽家と合奏する機会も多かったらしい．

35歳で結婚すると，今度はエリザベート夫人の歌唱の伴奏が始まる．七人の子宝に恵まれるが，長男にはヴァイオリン，次男にはチェロ，三男にはフルート，…と学ばせた．こうしてハイゼンベルク家では，予定どおり，室内楽演奏を楽しめるようになるが，やがて子供らが友人を呼んで来て，自分たちだけで合奏を始める．おそらくハイゼンベルクは，傍らで目を細めて彼等の演奏を聴いていたことであろう．

手許に「ハイゼンベルク家音楽会1965年6月」のCDがある．この音楽会を実際に聴いた山崎（和夫）さんから頂いたもので，曲目はモーツァルトの協奏交響曲変ホ長調（K.364）とピアノ協奏曲ニ短調（K.466）．ハイゼンベルク家では大きなお祝い（例えば夫・妻の誕生日）があると，このような‘大’音楽会が開かれたようである．家族や親戚，友人たちに声を掛ければ，忽ちのうちに室内オーケストラが編成された．指揮はちょうどそれを修業中の女婿F.マン（トーマス・マンの孫）が務めた．ピアニストは勿論ハイゼンベルク，さすがにプロの演奏とは趣を異にするが，よいテンポでよく歌わせている．皆いかにも楽しそうに演奏しているらしく，その雰囲気が伝わってくる．こういう音楽会が簡単に家庭で開けるとは，まことに羨しい限り——やはり音楽の都だけはある．

同じくモーツァルトの協奏曲を，バイエルン放送交響楽団と共演したこともある．七十歳記念に，彼の強い要望で実現した．その録音を放送すると告げられて大慌て．それを断るために次のように述べたという：“この共演を望んだのは，自分の技を世に問うためでは決してなく，最高のオーケストラと共演することにより，自らがさらに深く巨匠の音楽を実感できるのではないか，と思ったからである”と．彼のピアノ演奏は，このように厳しい修行でもあったといえる．

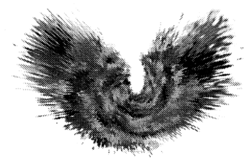
それではハイゼンベルクにとって音楽とは何であったのか．彼の次女バーバラの言葉が，そのヒントを与えてくれる：“人々が宗教に向うところで，ハイゼンベルクは音楽に向う，とある人が言ったが，これには私も全く賛成である”と*1)．宗教的とはいえないまでも，彼の演奏行為には，つねに一種の精神的効果が伴っていた，と私は見る．例えば，第二次大戦中の国難な時期には，ピアノはおそらく唯一の慰めであり避難場所であったろう．戦後拘留された‘ファーム・ホール’で彼が行った‘定期演奏会’も，互いに他を鼓舞するための場であったに違いない．トーマス・マンと同じく彼もまた，ベートーベンの最後のピアノ・ソナタ（op.111）のアリエッタを称揚した——“地上の穢れからは隔絶した，全く純粋で精神的なもの”として．いかなるときも，この曲さえ弾けば，音楽への没入と陶酔が得られた，ということであろうか．

音楽は，物理とともに，人間ハイゼンベルクの全体を構成する部分であり，その全体を保持するための精神的支柱であったか——と私は考えている．

（かめふち・すすむ，筑波大学名誉教授）

*1) Barbara Blum *et al.*, “Per Heisenberg”, Aracne (Roma) 2006, p.13.

ハイゼンベルク強磁性体理論と量子スピン磁性



宮下 精二

1. 磁性の起源

物質が示す磁性の起源については，古くから興味が持たれ，電子の運動に関連して議論が進められてきた．電磁気学的な相互作用は粒子の運動を表すハミルトニアンにおいて運動量 $\boldsymbol{p}$ をベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ を用いて $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}$ と変換することで表される．運動量と位置座標が独立な古典力学で分配関数を考えると，運動量の積分配位は $-\infty$ から ∞ であるので，上の置き換えは分配関数に変化を与えない．つまり，古典力学の範囲では熱平衡にある物質の磁化は，外場のないときと同じで 0 となる．このことはボーア–ファン・リューエンの定理 (Bohr–van Leeuwen theorem) と呼ばれる[1]．

そのため，磁性現象には量子力学的な効果が本質的であることがわかる．量子力学を踏まえた議論によって，L.D. Landau は反磁性について明らかにした[2]．これは電子の軌道運動による効果である．電子が示す常磁性や強磁性に関しては，スピン自由度の発見が本質的な役割を果たす．電子の軌道運動では説明できない不思議な二重縮退が存在することは，Na の分光などで知られていた．この自由度の存在は，O. Stern と W. Gerlach によってより明らかにされた[3]．1925 年，G.E. Uhlenbeck と S. Goudsmit は，この自由度は電子の回転によるものと考え，電子自体が磁石になり得るスピン磁気モーメントという考え方を発表した[4]．この考え方は，通常の運動からは理解できないものであり，角運動量の大きさも 1/2 と奇妙なものであるが P.A.M. Dirac によってその起源が相対論から明らかにされた[5]．さらに，電子がフェルミ–ディラック統計に従うフェルミ粒子であり，パウリの排他律に従うことが重要な要素であることが認識され，スピン磁性に関する研究が 1920 年代後半急速に進んだ．

その一つは，電子がフェルミ–ディラック統計に従うことから低温での金属常磁性を説明した W. Pauli の常磁性の研究[6]であり，もう一つは，パウリの排他律から，基底状態のエネルギーのスピン依存性，つまりスピン間相互作用，を明らかにした W. Heisenberg の強磁性の研究である[7]．

これらの研究がどのように進んだかについては，例えば，レビュー記事 “The developement of the quantum-mechanical electron theory of metal 1928–1933”[8] に詳しく述べられている．

そこで得られたスピン間の相互作用

$$\mathcal{H} = -J_{ij}\boldsymbol{S_i} \cdot \boldsymbol{S_j} \tag{1}$$

はハイゼンベルク模型と呼ばれ，その後の磁性研究の出発点になった．

2. ハイゼンベルク模型

簡単にそのアイデアを見てみよう．

2.1 パウリの排他律によるスピン間の実効的相互作用

各格子点に原子があり，それぞれ一つずつ電子を持っているとする．i 番目の格子点にある原子の電子の位置を $\boldsymbol{r}_i$，その軌道波動関数を $\phi_i(\boldsymbol{r}_i)$ とし，スピン σ_i の波動関数を $\theta_i(\sigma_i)$ とする．このとき，格子点 i の電子の波動関数は $\phi_i(\boldsymbol{r}_i)\theta_i(\sigma_i)$ である．

簡単のために 2 電子系を考える．電子の波動関数は $\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\theta_1(\sigma_1)$，もう一つの電子の波動関数は $\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\theta_2(\sigma_2)$ であるので，全体の波動関数は $\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\theta_1(\sigma_1)\theta_2(\sigma_2)$ となるが，2 つの電子は区別できないフェルミ–ディラック粒子であるので，$\boldsymbol{r}_1$

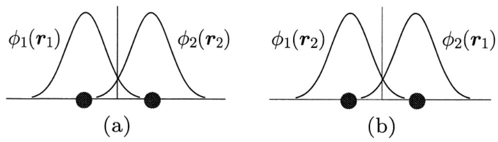


図 1 波動関数の重なりと粒子の入れ替え (a) 1 番目の粒子が格子点 1 に，2 番目の粒子が格子点 2 にいる状態，(b) 粒子の入れ替った状態.

と $\boldsymbol{r}_2$ を入れ替えて $\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\theta_1(\sigma_2)\theta_2(\sigma_1)$ としたものを用いると，全体の波動関数は

$$\begin{aligned}&\Psi_{12}(\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\theta_1(\sigma_1)\theta_2(\sigma_2)\\&\qquad-\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\theta_1(\sigma_2)\theta_2(\sigma_1))\end{aligned} \tag{2}$$

となる．この波動関数を用いて，スピン自由度に関するハミルトニアンを求めてみよう．

まず，$\theta_1(\sigma_1)=\theta_2(\sigma_2)=|+\rangle$ の場合を考える．これを $|{+}{+}\rangle$ と表す．以後，行列要素の計算は簡単のためにブラ・ケットを用いる[*1)]．相互作用項はスピンに依存しないので，$|{+}{+}\rangle$ に関しては，$\langle{+}{+}|{+}{+}\rangle=1, \langle{+}{-}|{+}{+}\rangle=\langle{-}{-}|{+}{+}\rangle=0$ であるので，行列要素 $\langle{+}{+}|V|{+}{+}\rangle$ だけがゼロでない．

$$\begin{aligned}&\langle\Psi_{12}(+,+,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)|V|\Psi_{12}(+,+,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\rangle\\&=\frac{1}{2}(\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|\langle{+}{+}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle|{+}{+}\rangle\\&\quad-\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|\langle{+}{+}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\rangle|{+}{+}\rangle\\&\quad-\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)|\langle{+}{+}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle|{+}{+}\rangle\\&\quad+\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)|\langle{+}{+}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\rangle|{+}{+}\rangle)\\&=\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle\\&\quad-\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\rangle\end{aligned} \tag{3}$$

である．ここで，$V=V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ は 2 電子に働くクーロンエネルギーである．もし，軌道部分が同じであれば $\phi_1=\phi_2$ であるので，第一項と第二項は等しく，この行列要素は 0 となる．つまり，パウリの排他律である．軌道部分が異なる場合，第一項と第二項は異なる．今の場合，2 つの波動関数は異なる格子点でのものなので異なるものである．それらはほぼ直交し $\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)|\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\rangle$ は小さいとする．

*1) 例えば，

$$\begin{aligned}&\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle\\&=\int d\boldsymbol{r}_1\int d\boldsymbol{r}_1\phi_1^*(\boldsymbol{r}_1)\phi_2^*(\boldsymbol{r}_2)V\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\end{aligned}$$

である．

第一項はクーロン積分と呼ばれる．

$$C=\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle. \tag{4}$$

また，第二項は交換積分と呼ばれる．

$$J=\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\rangle. \tag{5}$$

つまり，式 (3) の行列要素は $C-J$ である．

次に，$\theta_1(\sigma_1)=|+\rangle, \theta_2(\sigma_2)=|-\rangle$ の場合を考える．相互作用項のゼロでない行列要素としてまず

$$\langle\Psi_{12}(+,-,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)|V|\Psi_{12}(+,-,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\rangle$$

を考える．これを波動関数 (2) を用いて書き下すと

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|\langle{+}{-}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle|{+}{-}\rangle\\&-\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|\langle{+}{-}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\rangle|{-}{+}\rangle\\&-\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)|\langle{-}{+}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle|{+}{-}\rangle\\&+\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)|\langle{-}{+}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\rangle|{-}{+}\rangle)\end{aligned} \tag{6}$$

である．スピン部分は

$$\begin{aligned}&\langle{+}{-}|{+}{-}\rangle=\langle{-}{+}|{-}{+}\rangle=1,\\&\langle{+}{-}|{-}{+}\rangle=\langle{-}{+}|{+}{-}\rangle=0\end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}&\langle\Psi_{12}(+,-,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)|V|\Psi_{12}(-,+,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\rangle\\&=\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle\\&=C\end{aligned} \tag{7}$$

となる．

次に，

$$\langle\Psi_{12}(+,-,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)|V|\Psi_{12}(-,+,\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\rangle$$

を考える．これを波動関数 (2) を用いて書き下すと

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|\langle{+}{-}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle|{-}{+}\rangle\\&-\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)|\langle{+}{-}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\rangle|{+}{-}\rangle\\&-\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)|\langle{-}{+}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_1)\phi_2(\boldsymbol{r}_2)\rangle|{-}{+}\rangle\\&+\langle\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)|\langle{-}{+}|V|\phi_1(\boldsymbol{r}_2)\phi_2(\boldsymbol{r}_1)\rangle|{+}{-}\rangle)\\&=-J\end{aligned} \tag{8}$$

となる．これらより，ハミルトニアンの行列表示は

$$\begin{pmatrix} C-J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & -J & 0 \\ 0 & -J & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C-J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ++ \\ +- \\ -+ \\ -- \end{pmatrix} \tag{9}$$

となる．これを次の形に書くと

$$C-\frac{J}{2}+\begin{pmatrix} -\frac{J}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J}{2} & -J & 0 \\ 0 & -J & \frac{J}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{J}{2} \end{pmatrix} \tag{10}$$

となる．この行列は大きさ $S=1/2$ のスピン演算子 (S_i^x, S_i^y, S_i^z) を用いて

$$C-\frac{J}{2}-2J\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2 \tag{11}$$

と書ける*2)．

これは，スピンが平行の場合に反平行の場合より J だけエネルギーが下がることを意味し，強磁性の起源を与える．Heisenberg は，鉄などの金属の 3d 電子が格子点にほぼ局在化しているとしてこの相互作用によって強磁性の説明を行った．これが「ハイゼンベルクの強磁性」と呼ばれるものである．磁石，つまり強磁性体に関して，磁化間の相互作用による協力現象として相転移が現れる機構は P. Weiss によって，提案されていたが[9]，実際の相転移温度を出すような大きな相互作用の起源が不明であった．Heisenberg による交換積分を起源とする考えではクーロン力のオーダーの相互作用が可能となった．

2.2 その他のスピン間相互作用

その後，直接的な交換相互作用でなく，磁気原子間に他の原子を挟んだ構造での電子のやりとりによるスピン相互作用も P.W. Anderson 等[10, 11]によって明らかにされ，超交換積分などと呼ばれている．いずれの場合にも，スピン間の相互作用は

$$\mathcal{H}=-J\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2 \tag{12}$$

の形になる*3)．この場合もハイゼンベルク模型と呼ばれる．J の値は，状況によって正負をとり，負の場合は反強磁性体となる．

さらに，磁性原子が置かれた電子環境が異方的である場合，スピン相互作用もそれを反映して，$SU(2)$ の対称性が破れ，異方的な形

$$\mathcal{H}=-J_xS_1^xS_2^x-J_yS_1^yS_2^y-J_zS_1^zS_2^z \tag{13}$$

を持つ．この場合は異方的ハイゼンベルク模型と呼ばれる．特に，$J_x=J_y=0$ とした場合，各格子点に ± 1 の自由度があるモデルとなり，イジングモデルと呼ばれる[12]．このモデルは，W. Lenz の学生であった E. Ising 氏が強磁性のモデルとしてハイゼンベルク模型に挑戦した際，量子効果を無視する近似をして導入したモデルである*4)．さらに，空間反転性が破れると，スピンの外積で表される相互作用が現れる．

$$\mathcal{H}=-\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}_1\times\boldsymbol{S}_2. \tag{14}$$

この形の相互作用はジャロチンスキー–守谷相互作用と呼ばれる[13]．一般に，スピン間の 2 体相互作用は，行列 $\hat{J}$ を用いると

$$\mathcal{H}=\sum_{\alpha,\beta}\hat{J}_{\alpha\beta}S_1^\alpha S_2^\beta, \quad \alpha,\beta=x,y,z \tag{15}$$

の形で表されるが，対称部分 $(\hat{J}+{}^t\hat{J})/2$ は，うまくスピン座標をとると式 (13) の形で書け，反対称部分 $(\hat{J}-{}^t\hat{J})/2$ は，式 (14) の形で書けるので，以上で十分一般的な形が求まったことになる．

上述のハイゼンベルク相互作用は 2 体間での電子の交換を考え，互換演算子

$$P_{12}=\frac{1}{2}(1+\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2) \tag{16}$$

が本質的な役割を果たしたが，より広い範囲での電子の交換を考えるとスピンの多体相互作用が出てくる．3 体間の電子の交換を考えると

$$P_{123}=\frac{1}{4}(1+\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)(1+\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{\sigma}_3) \tag{17}$$

がでてくるが，これは互換演算子の和になる．

$$P_{123}=P_{12}+P_{23}+P_{31}-1. \tag{18}$$

さらに，4 体間以上の電子の交換は

---

*2)
$$S^x=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$
$$S^z=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
である．

*3) 相互作用が $SU(2)$ 対称性を持つので，この形しかないことは自明である．

*4) 量子効果のないイジングモデルにおいても 3 次元の自由エネルギーの厳密な形は現在でも得られていない．ちなみに Ising 氏が解いた模型は 1 次元の模型であったが，その模型は残念ながら相転移を示さない．2 次元の模型は，L. Onsager によって解かれた．これは熱力学的な相転移を示す最初の厳密解であり，その後の，相転移の研究の出発点になった．

$$
\begin{aligned}
P_{1234} = \ & \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_3 + \boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4 + \boldsymbol{\sigma}_4 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 \\
& + (1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2)(1 + \boldsymbol{\sigma}_3 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) \\
& + (1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4)(1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_3) \\
& - (1 + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_3)(1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_4) \qquad (19)
\end{aligned}
$$

で与えられる．このような多体効果は He^3 の研究で進められてきたが，最近ではスピン系でも考えられるようになってきている[14,15]．

2.3 遍歴磁性体での強磁性

Heisenberg は，遍歴磁性体である鉄などの原子の 3d 電子がほぼ局在しているとして，モデルを考えたが，これらの一般化されたスピン間のハイゼンベルク相互作用は，今では絶縁体の磁性モデルとして用いられる．

遍歴磁性体に関しては，バンドのブロッホ電子間の実効的交換相互作用を考えたストーナー模型と呼ばれるものや，各格子点の局在軌道間の電子移動をモデル化したハバード（Hubbard）模型[16]

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = & -t \sum_{<ij>} \left(c^\dagger_{\boldsymbol{\sigma},i} c_{\boldsymbol{\sigma},j} + c^\dagger_{\boldsymbol{\sigma},j} c_{\boldsymbol{\sigma},i} \right) \\
& + U \sum_i n_{+,i} n_{-,i} \qquad (20)
\end{aligned}
$$

で考える．ここで t は格子点 i, j 間の電子移動の強さを表すパラメターであり，U は異なるスピンをもつ 2 つの電子が同一格子点に来るときのクーロン相互作用の強さを表している．また，$n_{+,i} = c^\dagger_{+,i} c_{-,i}$ である．この模型では，電子の数と格子点の数が一致する場合（バンドの半分まで電子が詰った状態なので half-filled と呼ばれる），電子間の相互作用 U のため，バンド描像に反し，絶縁体になることが知られている（モット絶縁体と呼ばれる）．この状態では，系の全スピンは 0 であり，非強磁性であり，熱力学的極限で対称性が破れると反強磁性となる．

この模型を用いて，基底状態が強磁性になる模型もいろいろ調べられている．例えば，格子がある種の条件を満たす場合，この系から電子を一つ取り除くと，強磁性（全スピンが最大の状態）となることが長岡洋介によって示され，長岡強磁性と呼ばれている[17]．また，格子がある種の形をしていると，一体の電子に関するバンドのエネルギーが波数に依らない Flat band と呼ばれるバンドが現れ，その場合，基底状態に強磁性が現れることも知られている（Mielke–田崎強磁性[18]）．さらに，それらの長岡強磁性を拡張した模型も見つかっている[19]．

2.4 長距離秩序と南部–ゴールドストーンモード

J が正の強磁性の場合は，すべてのスピンが平行に揃った状態が基底状態となる．ハイゼンベルク模型では，スピンが揃う方向は空間のどの方向でもよいが，今の場合揃った方向を z 方向としている．このように，どこでもよい方向から一つの方向を選ぶ操作は対称性の破れと呼ばれる．また，そこからの励起はスピン波と呼ばれる $k = 0$ でエネルギーが 0 で，そこから $\omega = Jk^2$ の分散をもつ準励起がある．これは，j 番目のスピンがひっくり返った状態を

$$
|j\rangle \equiv ++ \cdots + - ++ \cdots \rangle \qquad (21)
$$

（$-$ の位置は j 番目格子点）とし，それらに係数 e^{ikj} を掛けて作った状態を $|k\rangle$

$$
|k\rangle = \sum_j e^{ijk} |j\rangle \qquad (22)
$$

とすると，それがハミルトニアンの固有値になっている．

$$
(\mathcal{H} - E_0)|k\rangle = J(1 - \cos k)|k\rangle \simeq \frac{1}{2} J k^2 |k\rangle. \qquad (23)
$$

このように，対称性の破れた状態から生じる連続的な励起は，南部–ゴールドストーンモードと呼ばれる．

3. 反強磁性モデル：量子スピン系

3.1 量子ゆらぎと Valence bond 状態

ハイゼンベルク模型で相互作用が強磁性の場合に，基底状態はすべてのスピンが揃った強磁性状態であるのに対し，相互作用が反強磁性の場合は，単純なネール状態（スピンが交替的に向きを変える状態）は基底状態にならない．この様子を簡単な 2 体の場合に見てみよう．

$$
\mathcal{H} = -2|J| \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2. \qquad (24)
$$

この固有状態は，固有値 $|J|/2$ を持つ，いわゆるスピン三重項（triplet state）

$$
|++\rangle, \quad \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{2}, \quad |--\rangle, \qquad (25)
$$

と，固有値 $-3|J|/2$ を持つ，いわゆるスピン一重項（singlet state）

$$
\frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{2} \qquad (26)
$$

で与えられる．

J が負の反強磁性の場合は，ネール状態 $|+-\rangle$（あ

るいは $|-+\rangle$）でのハミルトニアンの期待値は $-|J|/2$ であり，真の基底状態のエネルギー $-3|J|/2$ より高い．これは，$|+-\rangle$ と $|-+\rangle$ が共鳴してエネルギーを大きく下げているためである．この共鳴状態 (26) は Valence bond と呼ばれることがある．このように量子力学的な効果で古典的な状態が基底状態になれないことを量子ゆらぎという．不確定性関係に由来する現象と考えてよい．この量子系特有の性質のため，古典系にはない様々な基底状態が現れ，量子スピン系の問題として詳しく研究が進められている[20]．

3.2 反強磁性体での長距離秩序とスピン波

系が大きくなると，$|+-+-+-+-\cdots\rangle$ と $|-+-+-+-+\cdots\rangle$ の状態間の対称性が破れ，ネール状態が基底状態として現れ得る．3 次元反強磁性体では，低温での長距離秩序の存在が証明されている[21]．しかし，強磁性体の場合と異なり，反強磁性秩序は絶対零度において存在する場合にもその大きさは量子ゆらぎのため小さくなっている．そのような曖昧な秩序状態からのスピン波に相当する低エネルギー励起がどのようなものであるかが，Anderson，久保亮五によってスピン波理論を拡張して議論され，具体的な分散関係や基底状態でのスピンの縮みなどが示されている[22]．また，基底状態からの励起の特徴に関しての議論が Heisenberg，H. Wagner，山崎和夫によって与えられている[23]．

しかし，1 次元反強磁性体では，このような対称性の破れは起こらず，ネール相間が距離とともに冪的に緩和する状態であることが知られている[24]．しかし，その場合でも基本的な励起状態としてネール状態を表す $k=\pi$ の場合に振動数が 0 でそこから分散関係が $\omega=\pi|J|\sin k$ で与えられる励起状態 (des Cloizeaux–Pearson mode）があることが知られている[25]．

2 次元反強磁性体では，有限温度では秩序化が起きないことが厳密に証明されている（マーミン–ワーグナーの定理）[26]．これは，低次元系では，スピンが連続的に変わることから生じる低励起によって秩序が保てなくなるからである．この性質は強磁性，反強磁性共通と思われている．しかし，強磁性の場合，基底状態がすべてのスピンが揃った長距離秩序状態であることは自明であるが，反強磁性の場合，上で述べた量子ゆらぎによって基底状態での長距離秩序が存在できるかどうかは自明ではない．この問題に関しては，ある程度の異方性がある場合には長距離秩序の存在が証明され，また対称性の高いハイゼンベルク模型でも数値計算によって長距離秩序が存在すると信じられている[27]．

3.3 量子ゆらぎによる特異な磁性

反強磁性に場合は，量子ゆらぎに加えて，相互作用間に矛盾が生じるいわゆるフラストレーションの問題がある．これは，三角格子など奇数個のボンドからなる多辺体では，すべてのボンドを満足させることができない状況を指す．このような場合には，古典的な場合には 120 度構造をとるが，量子系の場合大きな量子ゆらぎが生じ，秩序が保たれるかどうか疑問視された．むしろ，上で述べた，シングレット対形成による大きなエネルギー利得を利用して Valence bond（VB）を敷き詰めた状態の線形結合によってよりエネルギーが低い状態を作ることも議論され，RVB（Resonating Valence Bond）状態と呼ばれた[28]．三角格子の場合は，120 度構造が存在することが示されたが，フラストレーションの効果がより強いカゴメ格子では，RVB 的な基底状態の存在が多くの数値計算などから示唆されている．

3.4 ハルデーン状態と VBS（Valence bond solid）

上で述べたように，反強磁性ハイゼンベルク模型は量子ゆらぎのため基底状態でのスピン配位が自明でなくなる．特に，驚くべき事実が F.D.M. Haldane によって示された[29]．それは，これまで議論してきたスピンの大きさが $S=1/2$ ではなく $S=1$ の場合，1 次元反強磁性ハイゼンベルク模型の基底状態からはスピンが連続的に変化することに相当する連続的な低エネルギー励起が存在せず，励起には有限の大きさをもったエネルギーギャップが存在するということである．そのためスピンの相関関数も $S=1/2$ のときの冪的緩和ではなく，有限の相関長をもつ指数緩和となる．このような不思議な性質はスピンの大きさが整数か，半整数であることによって変わることが示されている．このスピンの大きさが整数の場合の基底状態はハルデーン状態と呼ばれる．

この状態を理解するため，VBS（Valence bond solid）の考え方が導入された．この考え方はスピン空間の射影演算子を考えると見通しがよい[30]．

基底状態が VB の敷き詰めで表される，$S=1/2$ のスピン鎖が次近接相互作用 J_2 をもつ系（Majumder–Ghosh 格子）[31]

$$\mathcal{H}=J\sum_i\left(\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1}+\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+2}\right) \qquad (27)$$

を射影演算子を用いて調べてみよう．スピン 3 個 $\boldsymbol{S}_1$,

$\boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3$ からなる系の全スピンは $S=1/2$ か $S=3/2$ である．系を $S=3/2$ の空間に射影する操作は

$$\mathrm{P}^{S=3/2}=\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{S}_3\right)^2-\frac{1}{4} \tag{28}$$

で与えられる．つまり，この演算子は $S=3/2$ の状態に対しては 1 であり，$S=1/2$ の状態に対しては 0 である．上のハミルトニアン (27) は

$$\mathcal{H}=\frac{J}{4}\sum_i\left[\left(\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2+\boldsymbol{S}_3\right)^2-\frac{9}{4}\right] \tag{29}$$

と書けるので，このハミルトニアンは，$J>0$ の場合，どこか一つのスピン 3 個の組 $(\boldsymbol{S}_i, \boldsymbol{S}_{i+1}, \boldsymbol{S}_{i+2})$ が $S=3/2$ の状態となるとエネルギーが上がることになる．つまり，基底状態はどのスピン 3 個の組にも $S=3/2$ の状態が現れない状態である．そのような状態は VB を敷き詰めた 2 つの状態であり，スピン相関は 2 スピン間のみに局在する．このように VB の敷き詰めで表される状態を VBS 状態という．

この考え方を $S=1$ の場合に拡張すると，隣り合った 2 つのスピンの合成 $\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2$ の全スピンは $S=0,1,2$ のどれかである．ここで，次の演算子

$$\mathrm{P}^{S=2}=\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2+\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2\right)^2+\frac{2}{3} \tag{30}$$

を考えると，これは $S=2$ の状態に対しては 1 であり，$S=0, S=1$ の状態に対しては 0 である．そのため，ハミルトニアン

$$\mathcal{H}=J\sum_i\left[\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1}+\frac{1}{3}\left(\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}\right)^2\right] \tag{31}$$

で表される系のエネルギーは $J>0$ の場合，どこか一つの隣り合うスピン対が $S=2$ の状態となるとエネルギーが上がることになる．つまり，基底状態はどのスピン対も $S=2$ の状態が現れない状態である．この状態では，スピン相関関数が指数的に緩和することが示される．この機構は AKLT（Affleck–Kennedy–Lieb–Tasaki）機構と呼ばれる[30]．この状態は，$S=1$ のスピンを 2 つの $S=1/2$ のスピンで表したとき，VBS 状態になっている．また，このモデルでは基底状態と励起状態の間にエネルギーギャップがあることも示されている．

エネルギーギャップをもつ系は $S=1/2$ の場合でも，相互作用の強さを空間的に変化させることで実現することができる．最も簡単な例は，相互作用の強さが交互に変化するモデルで，この場合の基底状態は強いほうのボンドが VB を形成する．このようなモデルはダイマー模型と呼ばれる．また，はしご格子では，上で述べた $S=1$ ハイゼンベルク反強磁性体と同様に VB が敷き詰められた状態が基底状態となる[32]．

3.5 スピン・パイエルス状態

ハイゼンベルク相互作用の導出のときにも用いたが，その相互作用は異なる格子の波動関数の重なりに起因している．そのため，格子が変形する自由度を考えると，格子変形による弾性エネルギー損失を考えても，スピンハミルトニアンの部分で VB を形成してエネルギーを下げ格子が変形するほうが得になることがある．このような状態はスピン・パイエルス状態と呼ばれる．特に，1 次元の場合は格子がダイマー化したほうが必ず得になることがわかっており，格子変形が可能な場合そのような構造変化を伴う相転移が起こる[33]．

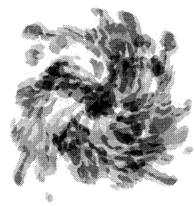
参考文献

1) N. Bohr, "Studier over Metallernes Elektrontheori", Kobenhavns Universitet (1911); H.J. van Leeuwen, *J. Phys. Radium* **6** (2), (1921) 361.
2) L. Landau, *Z. Phys.* **64** (1930) 629.
3) W. Gerlach, O. Stern, *Z. Phys.* **9** (1922) 353.
4) G.E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, *Naturwissenschaften* **47** (1925) 953.
5) P.A.M. Dirac, *Proceedings of the Royal Society A***123** (1929) 714.
6) W. Pauli, *Z. Phys.* **41**, (1927) 81.
7) W. Heisenberg, "Zur Theorie des Ferromagnetismus", *Z. Phys.* **38** (1926) 411, and **49**, (1928) 619.
8) L. Hoddeson and G. Bayrn, *Rev. Mod. Phys.* **59** (1987) 287.
9) P. Weiss, *J. Phys. (Paris) Ser 4* **6** (1907) 661; *Z. Phys.* **12** (1911) 935.
10) P.W. Anderson, *Phys. Rev.* **79** (1950) 350.
11) Hasekawa の項として T. Nagaoka, Y. Yoshida and R. Kubo, *Phyl. Mag. Suppl.* **4** (1955) 1 で引用されている．
12) E. Ising, *Z. Phys.* **31** (1925) 253.
13) I.E. Dzyaloshinskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **32** (1957) 1547 [*Sov. Phys. JETP* **5** (1957) 1259]; T. Moriya, *Phys. Rev.* **120** (1960) 91.
14) M. Roger, J.H. Hetherrington and J.M. Delriew, *Rev. Mod. Phys.* **55** (1983) 1; M. Roger, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 298.
15) K. Kubo and T. Momoi, *Z. Phys. B***103** (1997) 485; T. Momoi, K. Kubo and K. Nikuni, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 2081; T. Momoi, H. Sakamoto and K. Kubo, *Phys. Rev. B***59** (1999) 9491.
16) J. Kanamori, *Prog. Theor. Phys.* **30** (1963) 275; M.C. Gutzwiller, *Phy. Rev. Lett.* **10** (1963) 159; J. Hubbard, *Proc. Roy. Soc. (London) A***276** (1963) 238.

17) Y. Nagaoka, *Phy. Rev.* **147** (1966) 392; D.J. Thouless, *Proc. Phys. Soc. London* **86** (1965) 893; H. Tasaki, *Phy. Rev. B*40, (1989) 9192.
18) A. Mielke, *J. Phys. A*24 (1991) 3311; ibid. *A*25 (1992) 4335; *Phys. Lett. A*174 (1993) 443; H. Tasaki, *Phy. Rev. Lett.* **69** (1992) 1608; A. Mielke and H. Tasaki, *Commun. Math Phys.* **158** (1993) 341.
19) Y. Watanabe and S. Miyashita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** (1997) 2123; Y. Watanabe and S. Miyashita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** (1997) 3981; Y. Watanabe and S. Miyashita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** (1999) 3086.
20) S. Sachdev: *Quantum Phase Transition*, Cambridge Univ. Press (1999); 宮下精二『量子スピン系』岩波書店 (2006).
21) J. Froehlich, B. Simon and T. Spencer, *Comm. Math. Phys.* **50** (1976) 79; F.J. Dyson, E.H. Lieb and B. Simon, *J. Stat. Phys.* **18** (1978) 335.
22) P.W. Anderson, *Phys. Rev.* **86** (1952) 692; R. Kubo, *Phys. Rev.* **87** (1952) 568.
23) W. Heisenberg, H. Wagner and K. Yamazaki, *Nuovo Cim.* **59** (1969) 377; W. Heisenberg and K. Yamazaki, *Nuovo Cim.* **11B** (1972) 125; K. Yamazaki, *Prog. Theor. Phys.* **48** (1972) 2404.
24) H.A. Bethe, *Z. Phys.* **71** (1931) 205; L. Hulthén, *Arkiv Mat. Astron. Fysik* **26A** (1938) 1.
25) J. des Cloizeaux and J.J. Pearson, *Phys. Rev.* **128** (1962) 2131.
26) N. Mermin and H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966) 1133; K. Kubo and T. Kishi, *Phys. Rev. Lett.* **61** (1988) 2585; H. Nishimori and Y. Ozeki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** (1989) 1027.
27) J.D. Reger and A.P. Young, *Phys. Rev. B*37 (1988) 5978; S. Miyashita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **57** (1988) 1934.
28) P.W. Anderson, *Mater. Res. Bull.* **8** (1973) 153; P. Fazekas and P.W. Anderson, *Philos. Mag* **30** (1974) 1618; S. Miyashita, *J. Phys. Soc. Jpn.* **53** (1984) 44.
29) F.D.M. Haldane, *Phys. Lett. A*93 (1983) 464; *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1153.
30) I. Affleck, T. Kennedy, E.H. Lieb and H. Tasaki, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 799; *Commum Math. Phys.* **115** (1988) 477.
31) C.K. Majumdar and D. Ghosh, *J. Math. Phys.* **10** (1969) 1388.
32) K. Hida, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** (1991) 1347.
33) M.C. Cross and D.S. Fisher, *Phys. Rev. B*19 (1979) 402; T. Nakano and H. Fukuyama, *J. Phys. Soc. Jpn.* **49** (1980) 1679; **50** (1981) 2489.

（みやした・せいじ，東京大学大学院理学系研究科）

場の量子論の適用限界をめぐって



亀淵 迪

ぷろろーぐ

小稿を自らのささやかなハイゼンベルク体験から始めることを許されたい．筆者が名古屋の坂田（昌一）教授の素粒子論研究室（E研）に入ったのは，大学3年生（旧制大学最終年）のときであったから21歳，そして量子力学も同じく21歳であった[*1)]．何分にも日々学んでいるのがそういう新しい学問であるとの意識が，自らもまた研究の第一線に立っているかの如き幻想を生み，それがさらに一種の高揚感にまで繋がっていたように思う．しかもその量子力学創造に貢献したのが，当時の筆者らとほぼ同年齢だった頃の3人の天才——ハイゼンベルク・ディラック・パウリ——とあってはなおさらのことであった．もっとも，こうした類いの臨場感は，現在の研究者には理解し難いことかもしれないが．

さて3天才との関わりはE研に入る一年前から始まった．坂田教授の量子力学講義はパウリ（の Handbuch）流儀であり，輪講にはディラックの教科書，またE研に入っての場の理論に至っては，ハイゼンベルク・パウリの原論文を，それぞれ原語で読まされた．場の理論については教科書など皆無の時代だったから致し方ないこととは言え，いまから考えれば可成りのスパルタ教育ではあった．

申すまでもなく3人は第一級の天才であり，遥か彼方に聳え立つ3つの高峰であった．一般に天才は風変わりな存在であり，‘奇妙さ’の量子数 $S \neq 0$ をもっている．しかしこの規則にも大きな例外があり，ディラックやパウリの $S \gg 0$ は当然としても，ことハイゼンベルクに至っては全くの $S = 0$ であった．D峰やP峰は周りを険しい峡谷が取り囲み，余人の接近を拒んでいたが，H峰においては，その麓へと至る道が足下から真っ直ぐに伸びていた——あたかもわれわれの進むべき道を指示するかのように．ディラックを首天使，パウリをメフィストフェレスとすれば，ハイゼンベルクはまさしくファウストであり，あくまでも正統的であるように見えた．

幸いなことに，E研にはすでに熱烈なハイゼンベルク・ファンの2先輩が居た——梅澤（博臣）・河辺（六男）の両氏である．そこで早速筆者も加わり，3人でハイゼンベルクの全論文を読破しようとの大計画を立てた．乱流についての学位論文から始め，20篇くらいはこなしたであろうか．しかしこの計画も両先輩が次々とE研を去るに及んで自然消滅してしまった．ただこのときの経験が，その後の筆者らの研究に大きな影響を与えたことは確かである．

1. 場の量子論の困難と最小の長さ r_0

こうして読んだ論文の中で，とくに筆者らの関心を引いたのが，標記の問題についての数篇であった．如何なる理論にも**適用限界**があることは，前世紀の二大革命以来物理学者の常識となっているが，場の量子論といった大理論の適用限界を，その創始者自らがかくも早々と論ずるとは，やはり天才は違うなと感心したものである．1936〜39年の期間にハイゼンベルクは，当該問題について数篇の論文を著わしているが，そこでの議論に通底するのが，いわゆる**最小の長さ r_0** の概念であった[1)]．

*1）ただしここでは量子力学の完成を，その数学的形式に対する物理的解釈，いわゆる‘コペンハーゲン解釈’成立のとき（ボーアのコモ講演，1927年9月16日）としている．これを認めれば，量子力学と筆者の誕生日は，ただ3日だけの違いとなる．

周知のように，古典電磁気学には，電子の自己エネルギーが発散するという困難があった．電子半径を a とするとき，クーロン斥力に由るエネルギーが $\sim e^2/a$ となり，$a \to 0$（点電子）では発散してしまう．しかし $a \neq 0$ に保つことは相対論との整合性から許されない．他方，空洞輻射における困難が量子論によって解決されたと同様に，電磁気学における上記の発散も，量子論ではあるいは解決済みではないかとの淡い期待もあった．しかし現実はより厳しかった．

相対論的場の量子論の決定版とも言うべきハイゼンベルク・パウリの論文[2)]が現れたのは1929〜30年であるが，すでにこの論文において，発散の困難がなお存続することが示唆されていた．そしてほぼ同時にオッペンハイマーとワラーが，実際計算によってこのことを確認する[3)]．

さて，こうした困難の原因として，ハイゼンベルクは場の量の正準交換関係を挙げる．場の量およびこれに正準共役な量をそれぞれ $\phi(\vec{x})$, $\pi(\vec{x})$ とするとき，$[\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x}')] = i\hbar\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ となるが，この右辺が δ 関数であることから直ちに次の結果が導かれる，とする；i) $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ は有限自由度 $(a, b, \cdots)$ の場合における δ_{ab} の一般化であり，この事実は場が無限の自由度をもつことを再確認させる；ii) 場の量子化から出来する量子，すなわち粒子は点粒子である[*2)]；iii) このような性質をもった場あるいは粒子が互いに相互作用することが，結局，発散の困難を惹起する，と．

$r \equiv |\vec{x} - \vec{x}'| \to 0$ の下で $\delta(\vec{x} - \vec{x}') \to \infty$ となるのであるから，∞ 除去のためには，$r \to 0$ を禁止すればよい．そこでハイゼンベルクは次のように考えた．すなわち，'来たるべき理論'（当時この言葉は国内外でよく使われた）においては普遍定数として，$c, \hbar$ の他にさらなる定数 r_0 が存在するのではなかろうか，と．ここに r_0 は'最小の長さ'とも呼ぶべきもので，通常の'長さ'の概念は $r < r_0$ の領域では恐らく成立しないであろう．空洞輻射の場合の困難が $\hbar = 0$ としたために起こったのと同様に，場の理論における諸困難も $r_0 = 0$ としたことに由るのではないか，と推測する．換言すれば，既存の理論の適用限界は $r > r_0$ によって与えられることとなる．

*2) 空間領域 v に含まれる'物質量'を $\rho(v)$，1 粒子状態を $|\vec{x}\rangle$ とするとき，$\vec{x} \in v \ (\notin v)$ に応じて $\rho(v)|\vec{x}\rangle = |\vec{x}\rangle \ (0)$ が成り立つ．$v \to \vec{x}$ により，$|\vec{x}\rangle$ は点的な存在であることが分かる．ただし相対論的な場合には，粒子・反粒子を別々に取扱わねばならない．

M, L, T の 3 単位に対応して，普遍定数にも $c, \hbar, r_0$ の 3 個が存在するとの仮定は，極めて自然な考え方ではある．この場合，種々の物理量は，結局，const. $c^l\hbar^m r_0^n$ の形に書かれるであろう——例えば素粒子の質量は const. $(\hbar/cr_0)$ のように．実際に r_0 として，彼は**古典電子半径** $r_0 = 2.81 \times 10^{-13}$ cm 程度のものを考えた．古典電子半径とは如何にも古いが，当時のハイゼンベルクには，なお（古典論との）対応原理への顧慮があったのかもしれない．もっとも，核理論揺籃期の数値としては妥当なものであったとも言える．しかしながら，この新定数を如何にして相対論的な仕方で定式化するのかは，容易ならざる問題である．

2. 適用限界とその条件 I

レーリー・ジーンズの空洞輻射の公式が振動数 $\nu \to \infty$ で発散するのを避けるべく，ウィーンはこの式に $\sim \exp(-\bar{h}\nu/kT)$ なる因子を乗ずることを提案した（1896）．このような処方を通常**切断**と呼んでいる．

さて場の量子論における発散を防ぐために，同様な切断因子を r_0 を用いて導入したいのであるが，相対論的不変性を考慮して，ハイゼンベルクは次のように議論を進める[4)]．しばらくは彼の言葉を忠実に辿ってみよう．先ず，ハミルトニアン（密度）を $H_0 + H_{int}$ と書き，シュレーディンガー表示から出発するが，これにユニタリ変換 $\exp(-\frac{it}{\hbar}\int d^3xH_0)$ を施して'相互作用表示'（当時このような術語はなかったが）へと移行する．ここでの状態 $\chi(t)$ は $i\hbar\dot{\chi}(t) = \int d^3xH_{int}(\vec{x}, t)\chi(t)$ に従うので

$$\chi(t + dt) = \left(1 - \frac{idt}{\hbar}\int d^3xH_{int}(\vec{x}, t)\right)\chi(t) \tag{1}$$

となる．次に"(1) 式に簡単な一般化を施す"として

$$\chi(t_1) = \prod\left(1 - \frac{i}{\hbar}d\omega H_{int}(\vec{x}, t)\right)\chi(t_0) \tag{2}$$

を書き下し，次のように注意する．"ここに $d\omega \equiv dtd^3x$ であり，積 $\prod$ は t_0, t_1 で区切られた 4 次元領域におけるすべての $d\omega$ について行われる．この際，区切りの面 t_1, t_0 は $t_1 > t_0$ である以外は必ずしも平行である必要はない．また積中の非可換な演算子については，時間が大なるものが，つねに時間が小なるものの左に来るようにしなくてはならない．この時間的順序はローレンツ変換によって変わることはない．(2) の表式から理論の

相対論的不変性は明らかである．何故なら $H_{int}(\vec{x},t)$ はローレンツ・スカラーであるから” と*3)．

これはまことに驚くべき提言である．“簡単な一般化” によって，彼は通常の正準形式から，実質的に，**朝永・シュウィンガー形式**へと移行しているのである．実際，(2) 式を $d\omega(\vec{x},t_1)$ で微分すれば**朝永・シュウィンガー方程式**が得られるし，同式で $t_1 \to \infty$, $t_0 \to -\infty$ とすれば，右辺の演算子はダイソンの S 行列となる．このことは，すでに 1938 年の時点でハイゼンベルクは，朝永 (1943)・シュウィンガー (1948) 形式の基本構造を把握していたことを示している．当初の**ハイゼンベルク・パウリ形式**[2]では，その相対論的不変性の証明が迂遠になることから，それを自明な形にしたいとの願望が，つねに彼の脳裏に潜んでいたのではなかろうか．

さて次なる問題は，相対論的に不変な表式 (2) において，如何にして r_0 を導入するか，である．先ず注目すべきは，微小要素 $d\omega$ である．4 次元空間で，何れの方向にも $\sim r_0$ の大きさをもつ領域を構築したいのであるが，これを相対論的な仕方で実行することは見込薄である．そこでハイゼンベルクは，4 次元的な表式を断念し，上式において空間積分を実施する．しかしこの処方では，結局，通常の摂動公式に逆戻りしてしまい，折角の 4 次元方式も十分に利用されないままに終ってしまった——残念なことである．r_0 の導入は，従って，摂動公式の分子に現れる H_{int} の行列要素に対して行うこととなる．

1 個の粒子の運動量は，運動量 $\vec{k}$ の波を吸収または放出して，$\vec{p}_0$ から $\vec{p}$ へ，すなわち $\Delta\vec{p} \equiv \vec{p}-\vec{p}_0$ だけ変化する．この大きさ $|\Delta\vec{p}|$ に対して，例えば $|\Delta\vec{p}| < \hbar/r_0$ といった具合に制約を設けたいのであるが，これは相対論的ではない．そこで $\Delta\vec{p}$ に伴うエネルギー変化 $\Delta E \equiv E - E_0$ をも考慮して

$$\left|(\vec{p}-\vec{p}_0)^2 - \frac{(E-E_0)^2}{c^2}\right| < \left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2 \qquad (3)$$

へと一般化する．つまり，現在の理論の適用範囲は (3) を満たすような過程に限る，とするわけである．

この式を用いて，例えばコンプトン効果の ‘クライン・仁科の公式’ の適用範囲を求めると，入射光子の振動数 ν に対して

$$h\nu < \frac{1}{mc^2}\left(\frac{hc}{r_0}\right)^2 \approx 10^{10}\,\mathrm{eV}$$

が得られる（ただし m は電子の質量）．

しかしながら，条件 (3) は摂動の最低近似ではよかろうが，高次近似に移るといろいろと問題が起こってくる．例えば，仮想的な状態への転移に対しても，この条件を課するのかどうか．さらには，(3) は一粒子の状態変化に対しての条件に過ぎないので，粒子自体が消滅または生成する場合にはどうするのか，等々である．

この点で条件 (3) は，理論に現れる発散を除去する切断という観点からすると，不明確な事項が多いと言わざるを得ない．また理論の適用限界といった原理的問題が，摂動近似に依存して論ぜられているのも不満足な点ではある．

3. 適用限界とその条件 II

ハイゼンベルクにおける研究は，つねに実験事実との密接な関連の下に進められていたようである．しかし 1930 年代，素粒子についての新しい実験結果を求めるとすれば，宇宙線に頼る他はなかった．そこで彼は，当時の宇宙線実験での中心課題だった ‘空気シャワー’ に着目する．超高エネルギー（$\lesssim 10^{15}\,\mathrm{eV}$）の一次宇宙線の粒子が，空気中の物質と相互作用して素粒子の**多重発生**を惹起し，それが地上の広い領域（$\sim 100\,\mathrm{m}$ 平方）にシャワーのように降り注ぐ現象である．

1936 年の “宇宙線中のシャワーの理論について” と題する論文[5]において，以下のような興味深い考え方を提出している．当時はまだ湯川中間子の論文は彼の許に届いていなかったようで，その 2 年前に提出されていた β 崩壊に対する**フェルミ相互作用** H_f がこの現象を惹き起こすのでは，と考えた——それが弱い相互作用であるにも拘らず，である．当時他の人々は H_f の低エネルギー領域での振舞いのみに関心を奪われ，それが ‘フェルミ型’ か ‘ガモフ・テラー型’ か等々の議論に終始していた．これに反しハイゼンベルクは，一転，H_f の高エネルギー領域での振舞いに着目したのである．

以下の議論では，ハミルトニアン中に現れる諸量の次元のみが問題となるので，繁雑さを避けるため，$c = \hbar = 1$ なる単位を用い，また不必要な添字・係数等は一切省略する．電磁場を A, H_f に関与するスピ

*3) 相互作用ラグランジアン（密度）L_{int} はローレンツ・スカラーであり，一般には $L_{int} \neq -H_{int}$ であるが，L_{int} 中に場の量の時間微分が含まれていない場合には $L_{int} = -H_{int}$ となり，H_{int} もまたローレンツ・スカラーとなる．ハイゼンベルクが取扱った H_{int} はこの場合に相当する．

ン 1/2 の場を ψ として，電磁相互作用 H_e および H_f を次のように書く：$H_e = e\psi^\dagger\psi A$, $H_f = f\psi^\dagger\psi\psi^\dagger\psi$. 次元 $[\psi]$, $[A]$ は，それぞれの自由ハミルトニアンから決まるので，$[e] = [\mathrm{L}^0]$, $[f] = [\mathrm{L}^2]$ となる．

結合定数 e, f は極めて小さいので，摂動計算は非常によい近似を与える，と通常は考えられている．しかし H_f の場合には特異な状況が出現する，とハイゼンベルクは注意する．いま，与えられた高エネルギー現象においては，関与粒子の質量を無視してよく，系の大勢は全エネルギー E によって特定されるとしよう．この場合，任意の物理量 X の n 次の摂動項を $\langle X\rangle_n$ とするとき，$\langle X\rangle_n/\langle X\rangle_0 \equiv R_n$ は無次元である．従って H_e に対しては，単に $R_n = \mathrm{const.}\ e^n$ となるが，H_f に対しては $R_n = \mathrm{const.}\ (fE^2)^n$ が成立する筈である．それ故，もし $(fE^2) \gg 1$ であるならば，この摂動計算は意味をなさなくなる．これは摂動計算がよいとされる H_e の場合とは全く対蹠的な状況である．換言すれば，H_f はつねに弱い相互作用ではなく，高エネルギーでは空気シャワーの如き現象をも惹起し兼ねない強い相互作用となる．今日の素粒子論では，こうした考え方はすでに常識となっているが，当時としてはまさに画期的な発想だったと想像される．

このことから彼は，摂動論の使用に基づき，場の量子論に対するさらなる適用限界として $E \lesssim 1/\sqrt{f}$，あるいは通常の単位に戻して

$$E \lesssim \frac{\hbar c}{\sqrt{f}} \approx 580Mc^2$$

を提案する（ただし M は陽子の質量）．同じ論法は H_{int} の相互作用定数 f の次元が $[f] = [\mathrm{L}^\eta]$ $(\eta > 0)$ の場合にも適用され，適用限界は一般に

$$E \lesssim \hbar c f^{-1/\eta} \tag{4}$$

の形を取ることとなる．

以上から，次の結論が導かれる．H_{int} は，その相互作用定数の次元が $[\mathrm{L}^0]$ か $[\mathrm{L}^\eta]$ $(\eta > 0)$ かに応じて，全く違った性格をもつ．そこでハイゼンベルクは，前者を**第一種相互作用**，後者を**第二種相互作用**と呼んで区別することを提案した[6)]．

因みに朝永（振一郎）もまた適用限界の問題に興味をもち，綜合報告を書いている[7)]．そこでは条件 (3), (4) のことを，それぞれ ‘ハイゼンベルク・ワタギンの条件’，‘ハイゼンベルク・オッペンハイマーの条件’ と呼んでいる．

4. 繰り込み理論との関連

1939 年の素粒子論についての ‘ソルヴェイ会議’ は，第二次世界大戦勃発のため急遽中止となり，それに招待されていた湯川（秀樹）はヨーロッパ到着後そのことを知らされる．なお朝永は，当時ライプツィヒ大学のハイゼンベルクの研究室に留学中であった．帰国した湯川に送られて来たと思われる会議予稿集[*4)]の中に “素粒子の一般的性質について” の報告がある．第 III 部 “素粒子の相互作用”，第 IV 部 “従来の理論の限界” はハイゼンベルクが，そしてそれに先立つ第 I, II 部はパウリが担当した．幸いにもこの報告のコピーが E 研にあり，適用限界の問題に興味をもっていた筆者らのバイブルとなった．『ハイゼンベルク全集』(Gesammelte Werke Heisenberg) で 1984 年に出版された一巻の中にこの報告が収められているが，驚いたことに，“当該報告の出版はこれが初” とある[*5)]．それ故，この報告を 1950 年の時点で読むことが出来た筆者らは甚だ好運だったことになる．因みにパウリが担当した第 I, II 部は，その後装いを新たにし，“素粒子の相対論的場の理論” と題して *Rev. Mod. Phys.* **13** (1941) 203 に発表された．どうしたことか，その別刷も筆者はもっていて，これもまたよい教科書となった．

話を本題に戻す．筆者が E 研に入った 1949 年前後は**繰り込み理論**華やかなりし頃であるが，それが万能ではないこともまた，徐々に判明していた．そこで適用限界研究の一環として，繰り込み理論自体の限界はどうなるのか，との問題意識が筆者らの中に芽生えていたように思う．坂田・梅澤および筆者の論文（以下 ‘三者論文’）[8)] はこうした状況から生れた．相互作用が繰り込み可能か否かの判定条件は，まさにハイゼンベルクの分類に対応する，との結論である[*6)]．

さて，与えられた相互作用 H_{int} が**繰り込み可能**とは次のような場合を指す．H_{int} に対する S 行列を，例えばファインマン図を基にして計算したとき，発散項の形が有限個に留まり，それらを繰り込むべき項 $H'_{int}, H''_{int}, \cdots$ を予め系のハミルトニアンに入れておけば，発散はすべて吸収される．この際 $H'_{int}, H''_{int}, \cdots$ の導入は新たな発散を生むことはなく，理論は発散を

*4) その送付方法については定かではないが，あるいは S 行列の論文とともに，独・日の潜水艦によって運ばれて来たのかもしれない．

*5) ただし章（部）の番号付けは文献 6) と違っている．

*6) この論文の成立過程については，高橋康氏の一文に詳しい[9)]．

含まない閉じた体系となる．

これに反して**繰り込み不可能**な場合とは，摂動の高次に移るに従って，新しい形の発散項が次々と現れ，結局，無限個の H'_{int} の導入が必要となり，理論は閉じた体系とはならない．

再び $c = \hbar = 1$ の単位系をとるとき，繰り込み可能性の判定条件は次のように与えられる．先ず諸量の定義から：場 $\phi_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \cdots)$ に対する H_{int} を

$$H_{int} = (\text{結合定数}) \prod_\alpha \partial^{a_\alpha} \phi_\alpha(x) \tag{5}$$

とする．ここに $\partial \equiv \partial/\partial x_\mu$, a_α は ∂ の総数．場 $\phi_\alpha(x)$ の伝搬関数は

$$\langle T(\phi_\alpha(x), \phi_\alpha(x')) \rangle = i(\partial^{b_\alpha} + \cdots)\Delta_F(x - x').$$

ここに $\Delta_F(x)$ はファインマン関数，b_α は ∂ の総数，'$+\cdots$' は ∂ の低次の項を表す*7)．さらに K なる量を

$$K \equiv 4 - \sum_\alpha \left(a_\alpha + \frac{1}{2} b_\alpha + 1 \right) \tag{6}$$

とする．

このとき

$$K \geqslant 0 \tag{7}$$

ならば H_{int} は繰り込み可能であり，

$$K < 0 \tag{8}$$

ならば――特別な事情（例えば対称性やその破れ）のため発散項の打ち消し合いが起こらない限り――繰り込み不可能となる．H_{int} が多数個存在する場合，各々に対する K が (7) を満たせば全系は繰り込み可能となる．

いま (5) 式の H_{int} において [演算子部分] = $[\mathrm{L}^\xi]$, [結合定数] = $[\mathrm{L}^\eta]$ とおくとき，ξ = (6) の第 2 項，$[H_{int}] = [\mathrm{L}^{-4}]$ であることから，

$$\eta = -K \tag{9}$$

が得られる．従って，ハイゼンベルクの第一種相互作用は (7) により繰り込み可能であり，第二種相互作用は，一般には，繰り込み不可能となる．ただし彼の考察からは $\eta < 0$ の場合が抜けている．相対論的不変性を考慮するとき $\eta = -1$，すなわち $H_{int} = f\phi^3$ のみが可能となる．ここに ϕ は（擬）スカラー場であり，3 個の ϕ は同一でなくてもよい．繰り込み理論の立場からは，上記の H_{int} を**超繰り込み可能**と呼んでいる．発散項が現れるのは摂動の 2 次までで，これらを適当に繰り込んでおけば，3 次以上では最早発散は現れない．従って $\eta = -1$ の場合も第一種に含めておいてよいかと思われる．

このようにして，ハイゼンベルクの相互作用の分類は，繰り込み理論の観点から，新しい光が当てられることとなった．第二種相互作用の高エネルギー領域での異常性は，繰り込み可能性をも損なうものであった．

*7) 同一の場 α が多成分 $\alpha', \alpha'', \cdots$ をもつとき $\langle T(\phi_{\alpha'}(x), \phi_{\alpha''}(x')) \rangle$ に対する b_α はすべて共通であり，多くの場合 $b_\alpha = 2S_\alpha$（S_α：スピンの大きさ）である．また ∂^{b_α} の係数が無次元になるように ϕ_α を規格化している．このため，例えば質量 $m \neq 0$ のベクトル場に対しては，通常の規格化と因子 m だけの相違がある．

5. 理論する姿勢について

'哲学する' という言葉は，恐らく独逸語の 'philosophieren' の直訳かと思われるが，これに対応して '理論する' という動詞を導入したいと，筆者は以前から考えている．理論について考えたり，書いたり，講じたり等々，理論に関係するあらゆる営為を具体化する，という意味の動詞としてである．以下ではハイゼンベルクにおける '物理と方法' などと言うよりも，もっと大まかな，彼の理論する姿勢について，個人的な印象を述べてみたい．

この稿を草するにあたり，久々に彼の論文を読み返してみて，先ず第一に感じたことは，先にも述べたことだが，彼の研究はつねに眼前にある実験結果との関連においてなされていた，との事実である．さらに言うならば，理論の適用限界などという純粋に原理的・理論的な問題を採り上げたのも，素粒子の多重発生という不可思議な現象が，果して既存の理論でもって説明可能なのか否か，との実際的な疑問から始まったのではないか，とすら思うのである．核構造や宇宙線，そして強磁性の研究も，恐らく同じようにして着手されたのではなかろうか．このようなリアリストとしての側面を筆者は先ず強調しておきたいと思う．

印象の第二は，理論が確実に取扱える，いわば容易な問題よりも，むしろ理論の適用限界外かもしれないような，より困難な問題のほうを重要視したという事実である．この点で彼は，わが国で例を挙げれば，坂田に類似する．坂田もまた，理論の矛盾こそが来たるべき理論への飛躍の契機となるとした．そしてハイゼンベルクと同様に，第一種よりも第二種相互作用を重

視し，繰り込みに代るべき方法の探索を筆者らに強く促したのであった．

しかし，リアリストとして現実に埋没するのではなく，現実への凝視の中から，何が本質的であるかを見極め，それを基に新しい理論を構築していくことが，彼においては可能であった．まさにこの資質こそが，彼をして最高の理論物理学者たらしめた所以であると，筆者は考える．得てして理論家は，理論のための理論に陥り勝ちであるが——とくに最近の研究者にはこの傾向が著しい——，数理学者であるよりも，彼は先ず物理学者だったのである．先に彼のことを正統的としたのは，この意味からであった．現実より発して高度の理論に至る，このような理論する姿勢を‘上昇的’と呼んでおこう．

しかしながら，彼のこうした姿勢は，後半生に至って相転移する．上昇的から‘下降的’へと転じたのであった．すなわち，1950年代後半以降は，周知のように，彼の全勢力は‘素粒子の統一場理論’の構築に注がれるようになる．単一の非線型スピノール場の方程式から出発して，素粒子のすべての性質を導出しようとする壮大な試みである．この意味で下降的なのである．式中の非線型項としては，もっとも簡単なものを選ぶにしても，曰く付きのフェルミ相互作用（第二種）たらざるを得ない．概してこうした試みは，技術的に困難であるばかりか，現実との密着を一応断った観点から出発するため任意性が多く，全く的外れの方向に進んでしまう危険性すら孕んでいる．

それにしても，功成り名遂げた大理論物理学者たちが，理論する姿勢において揃って上昇的→下降的と相転移してしまうのは，まことに不思議な現象ではある．先ずアインシュタインがそうであった．電磁場と重力場の統一に，彼は後半生を捧げた．ハイゼンベルクとは同時代人だった湯川も，‘非局所場’とか‘素領域’の概念を基に，素粒子論を構築しようと試みた．三者のそれぞれが，前半生では大きな仕事を成し遂げたので，その自信がさらに大きな理論へと挑む勇気を与えたのであろうか．あるいは，過去の実績があるので，たとえ新しい冒険が未完のまま終ったとしても，それもまたよしとする余裕があったからであろうか．何れにせよ，そこには老の一徹とか，ピグマリオン症*8)などという言葉では律し切れない，厳しさや烈しさがあったように思う．

話は逸れるがこの機会に，‘統一’場とか‘統一’理論などとして用いられている‘統一’なる言葉について一言しておきたい．統一とは，本来，多を一に統べること，すなわち‘多→一’の上昇的過程である（英：unification, 独：Vereinigung）．これに反して，アインシュタインやハイゼンベルクが意図したのは，全く逆の‘一→多’の下降的過程，すなわち‘一元的’（独：einheitlich）な立場であった．実際彼等は論文や著書でこの語を用いている．ところが通常，その邦訳や英訳となると，一律に‘統一的’（英：unified）となってしまう．日本語では‘一元的’という立派な言葉があるにも拘らずである．他方，英語にはこれに相当する適当な一語が——尠くとも筆者のもつ独英辞典には——見当らない．要するに，日本語・英語族の物理学者たちは‘多→一’と‘一→多’とを同一視して意に介しないようである——如何なものであろうか．

えぴろーぐ

小稿をE研以降の筆者のハイゼンベルク体験でもって結びたいと思う．初めてハイゼンベルク先生を見掛けたのは‘ニールス・ボーア研究所’に居た1957年ではなかったかと記憶する．ある日，お茶の部屋に入ってゆくと，ハイゼンベルク先生が他の人たちと談笑しておられた．間もなくボーア先生もやって来て同じテーブルに就いた．二大巨人を咫尺の間にして自ずと緊張したが，そのうちに，量子力学解釈の確立を目指して二人が日夜討論を重ねたのは，確かこの辺りの部屋だった筈，などと思いめぐらせていたことである．

その後学会などで屡々お目に掛かったが，とくに印象深いのが1958年夏のCERNにおける‘高エネルギー物理国際会議’での事件である．ハイゼンベルクの非線型スピノール場の理論についての講演に対し，座長のパウリが，殆ど粗野とも覚えるような言葉で激しく攻撃した——それは殆ど一方的な喧嘩であった．当時のヨーロッパでは，パウリもこの新理論に興味をもち始め，間もなく‘第2のハイゼンベルク・パウリ論文’が現れるのでは，と囁かれていたので，パウリの豹変ぶりには全く驚かされた．そして長年にわたる両者の友情もこれで終りか，と気を揉んだことである．

1972年の夏，筆者は一カ月間，ミュンヘンの‘マッ

*8) 自ら丹精して作り上げた理論に，たとえ実験的検証の見込みがなくても，あるいは多少の理論的欠陥があっても，なおそれに固執する症状を言う．相対論のJ.L. シングの造語であり，ギリシャ神話にあるキプロス王ピグマリオンの物語に拠る．

クス・プランク研究所' に滞在した．一日，先生に一時間ばかり時間を割いて頂き，いろいろと話しを伺った．話題が非線型スピノール場の理論に及んだときの先生の言葉は，いまでもよく覚えている："このスピノール場 χ は，たんなる数学的記号に過ぎず，この点でクォークなどとはその質を異にする．要は種々の物理的性質がこの χ でもってどのような '形' に書かれるかにある．量子力学における ψ も同様である" と．まことにプラトンの '元素 ≡ 正多面体' 説を思わせる言葉である．

この年の9月には，トリエステにある '国際理論物理学センター' において，ディラック七十歳を祝う会議が開かれた．量子力学の回顧と展望を主題としたもので，量子力学建設の功労者で当時なお健在だった殆どすべての人々が招かれていた——ディラックをはじめ，ハイゼンベルク・ヨルダン・ウィグナー・ワイツェッカー・ファン–デアーウェルデン・ランチョシュ・カシミア，等々．ハイゼンベルクの講演は，状態や素粒子概念の成立過程を回顧し，古い形の '原子論' は最早捨てねばならないと強調していた．これが先生にお会いした最後となった．

おわりに，筆者が梅澤氏から聞いた話を引いておく．氏が初めてミュンヘンでハイゼンベルクに会ったとき，彼が先ず口にした言葉は "あなたの名前を雑誌などで見掛けるとき，私はつねにあなた方の三者論文のことを思い出すのだ" であったとか．こう言いながら彼は如何にも嬉しそうな顔をしていた．きっと昔の相互作用の分類における自らの先見性が，余程嬉しかったのであろう——とはそのときの梅澤氏の感想である．

繰り込み可能性の条件式を初めて導出し，三者論文の仕事の口火を切ったのは筆者だったことを憶うとき，冒頭で述べた 'H 峰に至る真っ直ぐな道' を，ほんの数歩ではあるが前進できたのではないかと解し，自らを慰めている次第である．

参考文献

1) W. Heisenberg, *Annalen d. Phys.* **32** (1938) 20.
2) W. Heisenberg und W. Pauli, *Zeits. f. Phys.* **56** (1929) 1; **59** (1930) 168.
3) J.R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **35** (1930) 461; I. Waller, *Zeits. f. Phys.* **62** (1930) 673.
4) W. Heisenberg, *Zeits. f. Phys.* **110** (1938) 251.
5) W. Heisenberg, *Zeits. f. Phys.* **101** (1936) 533; **113** (1939) 61.
6) W. Heisenberg, Solvay Bericht, Kap. III, IV (1939).
7) 朝永振一郎,『物理学講演集 (2)』学術研究会議編 (1941); "*Scientific Papers of Tomonaga*" vol.2, みすず書房 (1976) p.273.
8) S. Sakata, H. Umezawa and S. Kamefuchi, *Phys. Rev.* **84** (1951) 154; *Prog. Theor. Phys.* **7** (1952) 377.
9) 高橋康，素粒子論研究 **114** (2007) 35.

（かめふち・すすむ，筑波大学名誉教授）

S 行列理論の研究



大貫　義郎

1. 新物理学

20 世紀の前半，物理学に二つの大きな革命が訪れた．

よく知られているように一つはアインシュタイン（A. Einstein）による 1905 年の**特殊相対性理論**そして 1915 年の**一般相対性理論**の樹立であり[*1)]，もう一つはハイゼンベルク（W. Heisenberg）による**量子力学**[*2)]の発見である．いずれの場合も，長いこと絶対の真理とみなされてきたニュートンの力学やそれに基づく自然観の通用し得ない世界があることが明らかにされたのである．そこはこれまでとは全く異なる法則に支配されていた．そして相対論では，光速ないしそれに近い速度で運動する物体，あるいは重力の本性に関わる世界がつぶさに論じられて時空間の新しい認識が生み出され，宇宙の構造とも深く関わるようになっていった．他方，量子力学は微視的な世界，例えば原子の内外における電子の振舞いなどがまず取り上げられ，そこから新法則が次々に確立されていった．相対論にせよ，量子論にせよ，その出現はいわば新物理学の誕生である．そうしてこれ以前の物理学に対してはしばしば“古典”という名称が冠せられるようになった．

もちろん，このような新物理学の出現で古典物理学が存在意義を失ってしまったわけではない．新物理学は我々の日常経験とはほとんど程遠い世界に関係していた．実際，ロケットの軌道計算にせよ日食の日時の予言にせよ新物理学はそれをなし得る力を持っておらず，依然としてここは古典物理学の支配管轄する王国であって，いわば新物理学の分担域ではないのである．そうして結果として言えることは，自然法則といえども無制限にどこにでも使用可能なのではなく，それが適用できる特有の領域が存在し，その限界を超えたところではまた別の法則が支配しているという事実であった．真理と称するものが，どのような場合においてもそのままの形で通用するわけではないのである．新物理学の出現がもたらしたこの新たなる経験は，当時の物理学者に強いインパクトを与えたと言ってよい．

ハイゼンベルクの発見以後，量子力学は理論形式の開拓・整備が急速に進められ，微視的世界の現象を次々と説明していった．そうして 1928～1930 年ころには，その一部は場の量子論へと進展し，また相対論とも融合しつつ応用の範囲をいちじるしく拡大した．

ここで，表題の「S 行列理論」と関連するので場の量子論とはどんなものかを，まず簡単に述べておきたい．

2. 場の量子論へ

量子力学では微視的な対象の振舞いが議論され

*1)　以下，相対性理論を単に**相対論**と記す．
*2)　場合によっては慣例で**量子論**という言葉も使われる．

るが，そこでは粒子が変化することはない．電子はずっと電子であり陽子はずっと陽子のままである．ところが現実には微視的な世界で粒子の変わる現象が起こっている．例えばベータ崩壊と呼ばれる現象では，中性子が消えてそのとたんに陽子と電子と反ニュートリノという3個の粒子が発生する．あるいは原子内を運動する電子は，光の構成要素である光子という粒子を吸収してエネルギーのより大きい状態に飛び移る．このとき電子は電子のままだが光子の消滅が起こっているのである．もちろんこれの逆過程，つまり電子からの光子の放出現象も存在する．いわば素粒子の生成や消滅が起きるわけで，これによって引き起こされる現象は**素粒子反応**と呼ばれる．

場の量子論はこのような反応を記述するもっとも有力な手段として展開された．場は電磁場に見られるように時間，および空間座標を変数として記述され，波動として伝搬しエネルギーを運ぶ．そうして光子に対応して電磁場があるように，すべての素粒子にはそれぞれに特有の場が存在すると考えられた．つまり電子には電子場が，陽子には陽子場が存在するといった具合である．我々の空間は様々な場で充たされており，場の量子論とはこのような場の振舞いを量子論のルールに従って扱う理論である．

ついでに注意しておくと，場の波動は量子力学で用いられるいわゆる波動関数の波動とは全く別物である．前者は電子や光子のような物質を場で表したときの運動を示すものであって物質波と呼ばれ，これに対して後者は系の状態の波動的な性格を記述し量子力学に特有の確率論的な性格と深く関わるもので，確率波とも呼ばれる．端的に言えば一方は物質の，他方は状態の示す波動であって，場の量子論にはこのような性格の異なる2種類の波動が関与している．

次節で少し詳しく述べることになるが，量子力学ではすべての物理量はヒルベルト空間上の線形演算子で記述される．これに対応して場の量子論では，物理量は場で記述され，その場が線形演算子ということになる．もちろん演算子の性格を規定する規則，つまり場の充たすべき代数関係が別に設定される必要があるが，この設定を場の量子化と呼んでいる．そうしてこれが結果として粒子の生成・消滅を導くことになるのであるが，それを手短に説明するのは難しい．やや面倒な数式も必要でありこれだけで多くのページを使うことになるからである．とにかく，ここでは場の量子論とは素粒子反応における粒子の生成および消滅が扱える理論であると思っていただきたい．

光子はもとより光速で運動するが，多くの素粒子はしばしば光速に近い運動をする．そのため場の量子論は特殊相対論の要求つまりローレンツ変換のもとでの不変性をも満足しなければならない．相対論的場の量子論と呼ばれるものである．そうして電子と光子からなる系つまり電子場と電磁場からなる系に関し，ハイゼンベルクとパウリ (W. Pauli) は，1929年と1930年の共著論文において相対論的形式を備えた場の量子論の枠組みとそれを導く一貫した手法を確立した．ハイゼンベルク・パウリの理論と呼ばれるものである．

しかしこれ以前から場の量子論には困った性質がつきまとっていた．電子 (e) の扱いは相対論的ではないが，そのような場合でも光子 (γ) の放出・吸収 $e \rightleftarrows e+\gamma$ の反応は電磁場との相互作用を通じて起きていると考えられる．しかし電子が単独に存在するときには，上のプロセスで発生した γ は，粒子像を結ぶことができない．もし粒子になっていれば $e \to e+\gamma$ はエネルギー・運動量の保存則に反するからである．つまりこの γ はエネルギーや運動量の値がはっきりした粒子の姿をとって飛び出し，観測にかかるという類のものでなく，発生しても姿を整えられずすぐにもとの電子に吸収されてしまわざるを得ない．現実の光子と異なるこの種の γ は仮想光子 (virtual photon) と呼ばれている．場の量子論から見るならば電子はこのような仮想光子の出し入れを不断に行っているとみなさなければならない．その結果電子1個の系でも，電荷がゼロの場合と較べると，エネルギー値に変化が生じる．変化分は電子の自己エネルギーと呼ばれるものであるが，計算してみる

とその値は，電荷がどんなに小さくてもそれがゼロでない限り，無限大になるという奇妙な結果をもたらした．もとより自然界に無限大という量はないので明らかに矛盾である．その後，さっそく相対論的なハイゼンベルク・パウリの理論で電子の自己エネルギーの計算が行われた．結果は無限大の度合いは下がったものの有限値を得ることはできなかったのである．そればかりではない．非相対論的な電子のときには見られなかった別種の無限大が現れたのである．

さらに電子と電磁場の系以外でも，場の量子論では摂動計算の近似をあげるとしばしば積分が発散して無限大の生じることが明らかになってきた．この事態は**発散の困難**と呼ばれ深刻な問題を投げかけたのである．

計算の過程で発散を与える積分をつぶさに眺めると，この困難は，いかほど微小な時空間の領域においても，ハイゼンベルク・パウリによって定式化された相対論的場の量子論のスキームがそのまま用いられた点にあることは間違いないと思われた．

これと関連して1930年代の終わり，ハイゼンベルクは自然界には**普遍的な長さ**（univeral length）l_0 が存在するという考えを提唱する．

すでに述べたように既知の物理法則には限られた適用の範囲がある．場の量子論にも同じように適用限界があるのではなかろうか．理由の一つが上記の発散の問題であった．それは微小な時空領域における場の量子論の振舞いと関連して発生している．それゆえ l_0 よりもさらに小さい極微の領域は場の量子論の適用限界の外にあり，そこでは未知の物理法則が働いて発散の問題を解決していはしないか．相対論と量子力学という相次ぐ二つの革命を体験してきた目から見ると，第3の革命があっても不思議ではない．その到来を意識することは当時比較的自然であったように思われる．

量子力学の支配域はプランク（M. Planck）の定数 $h(\approx 6.63\times 10^{-34}\mathrm{J\,s})$ によって，また相対論の支配域は光速 $c(\approx 3\times 10^{8}\mathrm{m\,sec^{-1}})$ によって特徴づけられている．おそらく来るべき新物理学にもそれを特徴づける h, c とは独立な普遍定数があるであろう．それが l_0 ではなかろうか．そのときすべての物理量は，これら3個の定数を用いて表すことができる．ハイゼンベルクは，中間子の多重発生現象*3) などから $l_0 \approx 10^{-13}\mathrm{cm}$ と想定していたようである．そうして，l_0 で特徴づけられた新理論は $l_0 \to 0$ の極限で発散を含む通常の場の量子論に帰着すると考えた．

■ 3. S 行列*4) ■

ではどうすれば l_0 より小さい世界の物理法則を探り出すことができるであろうか．ハイゼンベルクはこれから述べるS行列理論なるものを構築してそれを行おうと企てたのである．

この研究は“素粒子論における観測可能量”（Die beobachtbaren Größen in der Theorie der Elementarteilchen）という題名が付けられて，その第1論文[1] および第2論文[2]は1942年にドイツの物理学雑誌 *Zeitschrift für Physik* に投稿され，翌年刊行された*5)．第3論文は1944年に刊行[3]，第4論文は草稿が残されており，のちにハイゼンベルク全集に収められた[5]．これらは全体で約90ページにおよぶ大作である．

しかしその内容を逐一紹介することは，ここでは不可能でありまたその必要もないであろう．以下では，S行列とはおよそどんなものか，そしてそれがどんな影響を残し，どうなっていったかを述べるにとどめたい．

それにはまず量子論の概略に少し触れておかねばならない．これなしには話が進められないからである．

古典力学と量子力学のもっとも大きな違いは状態の概念である．古典力学ではいくつかの物理量

*3) 宇宙線の中で核子や原子核が激しく衝突し，爆発的に多数の中間子が発生する現象．

*4) Streumatrix（散乱行列）．

*5) やや余談めくが，当時は第2次大戦の末期であり，同盟国のドイツとの連絡は無線通信以外はかろうじて潜水艦の往復があるのみであった．第1，第2論文の掲載された *Zeitschrift für Physik* は潜水艦で我が国に運ばれ，写真のコピーがつくられて広く読まれたという[4]．

の値が分かれば，それで系がどんな状態にあるかが決定された．つまり状態についての知識は物理量に関する知識そのものであった．ところが量子力学ではこの二つが分離されたのである．状態が与えられても，それに対する物理量の測定値は一意ではなくばらつきが生じるという．これは実験の誤差とか測定の不備によるものではなく，自然の構造そのものがそういう結果を生み出しているのだと考えられた．そうして何とも厄介な話であるが，状態はヒルベルト空間の元で，物理量はそれに作用する線形演算子で書かれることになった．

以下，慣習に従って状態を $|A\rangle$ と書こう．A は状態を指定するための記号である．状態はヒルベルト空間の元なので状態の加法，つまり任意の複素数 λ_1, λ_2 に対し $\lambda_1|A\rangle + \lambda_2|B\rangle$ が定義され，これもまた状態を表す．この操作を**状態の重ね合わせ**という．また二つの状態 $|A\rangle, |B\rangle$ の状態の間にはヒルベルト空間のルールに従って複素数値をとる内積 $\langle B|A\rangle$ が定義される．その主な性質を下にまとめておこう．

$$\langle B|A\rangle^* = \langle A|B\rangle \quad (* \text{ 印は複素共役}), \tag{1}$$

$$\| \, |A\rangle \, \|^2 \equiv \langle A|A\rangle \geqq 0, \tag{2}$$

$$\| \, |A\rangle \, \| = 0 \leftrightarrow |A\rangle = 0, \tag{3}$$

また $|C\rangle = \lambda_1|A\rangle + \lambda_2|B\rangle$ とするとき

$$\langle D|C\rangle = \lambda_1\langle D|A\rangle + \lambda_2\langle D|B\rangle. \tag{4}$$

Q は観測可能量でエルミート（正確には自己共役）演算子[*6]としよう．前に述べたように Q を観測して得られる測定値は一意ではない．その値は，量子力学によれば，演算子 Q の固有値（実数）で与えられる．それらを Q'_j $(j = 1, 2, \cdots)$ と書き[*7]，対応する固有状態を $|Q'_j\rangle$ としよう．すなわち

$$Q|Q'_j\rangle = Q'_j|Q'_j\rangle. \tag{5}$$

ただし $|Q'_j\rangle$ には適当に定数をかけて

$$\| \, |Q'_j\rangle \, \| = 1 \quad (j = 1, 2, \cdots) \tag{6}$$

とする．

いま系の状態が $|A\rangle (\neq 0)$ にあるとし，これに対して観測量 Q の測定を行い測定値 Q'_j が得られたとしよう．このとき状態は $|A\rangle$ から $|Q'_j\rangle$ に突如として飛び移ると考えられている[*8]．同じ状態 $|A\rangle$ をたくさん用意してそれぞれで Q を測定すると，測定ごとに様々な値 Q'_j $(j = 1, 2, \cdots)$ が得られるが，その頻度が全くでたらめでなく，量子力学によれば Q'_j という測定値は，規格化された $|A\rangle$（$|A\rangle$ に適当な定数をかけて $\| \, |A\rangle \, \| = 1$ としたもの）を用いて，確率

$$w_j = \left| \langle Q'_j|A\rangle \right|^2 \tag{7}$$

で与えられることになる．これはまた上に述べた Q の測定によって起こる状態の遷移 $|A\rangle \to |Q'_j\rangle$ の確率でもある．それゆえ，状態 $|A\rangle$ において Q を観測して得られる期待値は次のように書かれる．

$$\overline{Q} = \sum_j Q'_j w_j. \tag{8}$$

よく知られているように系の時間的な発展はシュレディンガー（E. Schrödinger）の方程式で与えられる．その結果時刻 $t = 0$ での状態 $|A\rangle$ が与えられたとき，この状態は時刻 t では $|A, t\rangle = U(t)|A\rangle$ となる．ここで $U(t)$ は，H を系のハミルトニアンするとき

$$U(t) = e^{-\mathrm{i}\,Ht} \tag{9}$$

で与えられるユニタリー演算子である[*9]．

さて以上の準備のもとに考察を進めよう．ただし話を単純化するためにハイゼンベルクの思考の経路を逐一追うことをやめて，量子力学でS行列がどのように定式化されるかを眺めることにする．

---

*6) 観測可能量は自己共役であっても逆は成り立っていない．あとの議論とも関連するが，実際に観測ができるのは自己共役演算子のうちのごく一部であろう．しかしそうであるための十分条件は分かっていない．

*7) 実際には j の値に下限がなかったり，上限があったり，あるいは連続であるなど様々な場合があるが，それらは必要とあればすべてここの議論の拡張として考えることにする．

*8) これは**射影測定**と呼ばれる特殊な測定である．測定の一般論は，ここでは本質的でないので立ち入らない．

*9) 簡単のために $c=\hbar=1$ の単位系を用いる．

まず，十分前の時刻 $(t=-\infty)$[*10]には，素粒子どうしは互いに遠く離れていて，影響を及ぼし合わない状況にあるとしよう．このとき系は自由粒子の集団とみなすことができる．その後それらが互いに近づいて相互作用を行ったあと，また互いに遠くに離れていって $t=\infty$ では自由粒子の系になると考えられる．このような無限の過去および無限の未来における自由粒子の世界を**漸近的な世界**と呼ぶ．漸近的な世界での系の時間的な振舞いは自由粒子のハミルトニアン H_0 で記述され，従ってここでの時間発展の演算子は $U_0(t)=e^{-\mathrm{i}H_0t}$ で与えられる．

この状況を式で表すと，時刻 $t=0$ での系の状態を $|\psi\rangle$ とするとき，これに対応して

$$\lim_{t\to-\infty}\{U(t)|\psi\rangle-U_0(t)|\psi^{\mathrm{in}}\rangle\}=0 \qquad (10)$$

ならしめる $|\psi^{\mathrm{in}}\rangle$ が存在することになり，従って

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \lim_{t\to-\infty}U^\dagger(t)U_0(t)|\psi^{\mathrm{in}}\rangle\\ &\equiv \Omega_+|\psi^{\mathrm{in}}\rangle \end{aligned}\qquad (11)$$

と書くことができる．同様にして

$$\lim_{t\to\infty}\{U(t)|\psi\rangle-U_0(t)|\psi^{\mathrm{out}}\rangle\}=0, \qquad (12)$$

それゆえ

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= \lim_{t\to\infty}U^\dagger(t)U_0(t)|\psi^{\mathrm{out}}\rangle\\ &\equiv \Omega_-|\psi^{\mathrm{out}}\rangle \end{aligned}\qquad (13)$$

をみたす $|\psi^{\mathrm{out}}\rangle$ の存在が導かれる．ここで演算子の肩についた † 記号はその演算子のエルミート共役を示す[*11]．

このようにして導かれた漸近的世界の二つの状態 $|\psi^{\mathrm{in}}\rangle$ および $|\psi^{\mathrm{out}}\rangle$ はそれぞれ**in-状態**および**out-状態**と呼ばれ，ともに漸近的な世界のヒルベルト空間の元である．

このとき次の関係が成立する．

$$\Omega_-^\dagger\Omega_-=1. \qquad (14)$$

これは漸近的完全性という性質に基づくものであるが，その説明はやや長くなるので立ち入らない[*12]．

さて，(14) を (13) に用いると，(11) により

$$|\psi^{\mathrm{out}}\rangle=\Omega_-^\dagger|\psi\rangle=\Omega_-^\dagger\Omega_+|\psi^{\mathrm{in}}\rangle,$$

従って

$$S\equiv\Omega_-^\dagger\Omega_+ \qquad (15)$$

とおけば

$$|\psi^{\mathrm{out}}\rangle=S|\psi^{\mathrm{in}}\rangle \qquad (16)$$

と書くことができる．このような漸近的世界での in-状態と out-状態をつなぐ演算子 S を **S 行列**と呼ぶ．

(16) は無限の過去において定義された in-状態が，十分長い時間を経て漸近的世界に入ったときそれがどういう out-状態になるかを与える式である．しかし実験と結びつけるためには，はじめに用意された状態に対して十分時間が経過したのちに物理量（例えば粒子のエネルギーや運動量）の測定を行い，その結果として得られる値のそれぞれがどのような確率で実現するかが示されねばならない．

そこでまず，相互作用が始まる前の漸近的な世界で自由粒子の状態 $|\phi\rangle$ が用意されたとしよう．これは先に述べた $|\psi^{\mathrm{in}}\rangle$ に対応する状態である．それゆえこの状態は (11) により時刻 $t=0$ においては

$$|\phi_+\rangle\equiv\Omega_+|\phi\rangle \qquad (17)$$

なる状態にならねばならない．ところで，さらに十分時間がたつと系は漸近的な世界に入り自由粒子の集団を記述する out-状態へと移行する．ここでまた測定を行い，その結果として $|\chi\rangle$ なる状態が観測されたとしよう．

つまり，十分時間を隔てた 2 回の測定により漸

*10）素粒子反応の，例えば，10^{-1} 秒間はほとんどの場合無限大の時間に匹敵する．

*11）(11), (13) は演算子 $U^\dagger(t)U_0(t)$ が $t\to\mp\infty$ で極限をもつことを意味しない．漸近的世界の状態に作用させたものが，はじめて極限をもつのである．

*12）演算子 Ω_- は一般に逆元をもつとは限らず，従って (14) をみたしていてもユニタリー演算子とは言えない．

近的世界の状態 $|\phi\rangle$ から $|\chi\rangle$ への遷移が確認されたことになる．しかしこの遷移の確率を単純に $|\langle\chi|\phi\rangle|^2$ とすることはできない．これらは異なる時刻での状態だからである．量子力学によれば遷移の前後の状態は同じ時刻のものでなければならない．そこで $|\chi\rangle$ を (13) に従って時刻 $t=0$ まで引き戻すことにしよう．そのときの状態は

$$|\chi_-\rangle \equiv \Omega_-|\chi\rangle \tag{18}$$

で与えられる．そうすると長時間を隔てた $|\phi\rangle$ から $|\chi\rangle$ への遷移は，$t=0$ で瞬時に起こる $|\phi_+\rangle$ から $|\chi_-\rangle$ への遷移確率で記述される．すなわち確率は，(7) を用いれば

$$\begin{aligned} w(\chi \leftarrow \phi) &= |\langle\chi_-|\phi_+\rangle|^2 \\ &= |\langle\chi|\Omega_-^\dagger\Omega_+|\phi\rangle|^2 \\ &= |\langle\chi|S|\phi\rangle|^2 \end{aligned} \tag{19}$$

で与えられ，S の行列成分 $S_{\chi\phi}=\langle\chi|S|\phi\rangle$ によって表現される．このときまた，演算子 S のユニタリー性

$$S^\dagger S = SS^\dagger = 1 \tag{20}$$

が導かれる．

以上は量子力学に沿った議論であるが，将来発散を含まぬ新理論がつくられた場合，そこにも漸近的な世界における無限の過去と無限の未来をつなぐユニタリー演算子 S が存在してすべての素粒子反応を説明するとともに，現在の理論における時間発展の演算子 $U(t)$ にこれがとって代わるであろうことが期待された．そのためには理論のローレンツ不変性や漸近的な世界での観測可能量を用いて，S のもつべき構造を明らかにする必要がある．これについてハイゼンベルクはいろいろ試みたが，議論の枠組みが広すぎて焦点が絞りきれず発散の問題や普遍的長さ l_0 への結びつきを見出すことができなかった．

他方，非相対論的量子力学において，与えられたポテンシャルを媒介とする散乱の S の吟味が行われた（第3，第4論文）．場の量子論とは異なり発散の問題とは関連しないが，将来の理論を意識してのことかと思われる．ここでの系は中心力ポテンシャル相互作用をするハミルトニアンを用いて書かれ，問題設定が具体的であるために，S の興味ある性質が明らかにされた．とくに2体散乱で入射粒子の相対運動量を複素変数に拡張したときの解析関数としての S の構造，例えば解析接続を通しての散乱振幅と束縛状態との関連などが浮き彫りにされた．またこれは，逆散乱問題つまり散乱のデータからポテンシャルの形を求めるという研究にも連なるものであった．現在これらはS行列というよりも“散乱理論”という枠内で扱われるが，しかしこれらの興味ある研究も，ハイゼンベルクのはじめに意図した場の量子論の発散の解決ひいては新理論の建設への手がかりを与えるものにはならなかった．

1946年5月，友人のパウリはハイゼンベルク宛に次のような手紙を書いている[6)]．“Deine Arbeiten über die S-Matrix habe ich mit großem Interesse gelesen, aber sie bleiben so lange nur ein Programm, als keine Methode angegeben wird, um die S-Matrix theoretisch bestimmen.”（私はS行列に関するあなたのいくつかの論文を多大の興味をもって読みました．しかしS行列を理論的に決定する方法が与えられない限り，これらは単にプログラムに留まっております．）

パウリに言わせれば，ハイゼンベルクのS行列理論は絵のない額縁とでもいうことであろうか．事実，このような形での理論はその後発展することはなかった．

■ 4. おわりに ■

もちろん素粒子反応を記述するからにはどこかで，漸近的な世界のin-状態とout-状態を結ぶS行列を経なければならない．それをどのようにして求めるかであるが，ハイゼンベルクのように観測可能量を頼りに外枠から理論のあるべき姿を追求するのではなく，はじめから場の量子論に改変をほどこし，それに基づいて発散のないS行列を構築しようという試みも1940年代の後半から1950

年代にかけ，多くの人々によって手がけられた．例えば 1949 年，湯川によって提唱された非局所場理論もその一つである．しかし結果から見るならばこれらの試みはいずれも成功するには至らなかった．いわば，相対論の要求を満足し巨視的な因果律に抵触しない発散を含まぬ整合的な場の量子論建設への展望は結局開かれなかったのである．そして多くの努力にも関わらず，ついには刀折れ矢尽きた感すらあったと言える．

しかし問題の深刻さが浮き彫りにされる中で，革命をあえて指向せず，むしろ保守的かとも思える研究が一部では進められていた．それは，場の量子論にあくまで忠実でしかも相対論的不変性が計算の諸過程で明白であるような理論形式の展開であった．超多時間理論あるいは相互作用表示の理論と呼ばれるもので，朝永，シュヴィンガー（J. Schwinger），ファインマン（R. Feynman）らにより提唱され，電子と光子からなる系に適用された．このとき S 行列は電子・光子の相互作用定数のべき展開で表され，その係数に発散が現れる．それらを注意深く整理分類した結果，発散は電子の質量と電荷のいずれかにくり入れられることが分かった．そうしてくり入れたものを，改めて電子の質量および電荷の実験値で置き換えるならば S 行列の表面から発散が消えることになる．いわゆる**くりこみ理論**の出現であった．この方法は電子・光子系の実験を説明する上で，その精度において驚異的な成功を収めたのである．この理論は**量子電磁力学**と呼ばれる．

くりこみ理論は発散量を有限な実験値で読み替えるという人的操作を必要とする点で，おそらく完成された理論とは言えない．しかも 1950 年代前半になると多様な素粒子とそれに伴う多様な相互作用のあることが分かってきた．これらのすべてがくりこみ理論の枠内ではたして扱えるかどうか当時我が国では疑問視する声が強かった．やはり一種の革命待望が底流にあったと思われる．ハイゼンベルクもまた量子電気力学におけるくりこみ理論の成功には大いに関心を示したものの，むしろ新理論の出現に期待をかけ，自らもそれを手がけていた．いわゆるフェルミ場の一元論といわれる一種の統一場理論であるが，この試みも成功を収めなかった[*13]．

1960 年代に入ると場の量子論はゲージ理論や対称性の自発的な破れなどに象徴される新しい流れに入る．そうしてこれらの理論のもつ豊富な内容が次々と掘り起こされた．その成果の陰に在って，ハイゼンベルクの S 行列構想の契機となった発散の問題は，完全な解決を見ることなく将来の課題として先に押しやられてしまった感がある．

*13）この頃すでにハイゼンベルクは彼の S 行列理論をあきらめていたようである．

参考文献

1) W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **120** (1943) 513.
2) W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **120** (1943) 673.
3) W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **123** (1945) 93.
4) 小沼通二，"ハイゼンベルクの戦時下の手紙"，「自然」2 月号 (1984) 58.
5) W. Heisenberg, *Heisenberg Gesammelte Werke*, **A** II, Springer Verlag (1989) 687.
6) R. Oehme, *Heisenberg Gesammelte Werke*, **A** II, Springer Verlag (1989) 605.

（おおぬき・よしお，名古屋大学名誉教授）

ハイゼンベルクと乱流の理論

巽　友正

1. ハイゼンベルクの乱流研究

ハイゼンベルク（W.K. Heisenberg）は，20 世紀初頭から後半にかけて活躍した物理学史上の偉人で，量子力学理論の確立に大きく貢献した第一人者として著名である．しかし，同氏が同時に，古典力学の分野である流体力学における「乱流」の理論的研究について，専門学者も及ばぬ研究業績を挙げていることは，余り知られていない．ハイゼンベルクの「乱流の理論」に関する研究は，次の二つの時期に大別される．

初期のものは，彼がミュンヘン大学で，ゾンマーフェルト（A.J.W. Sommerfeld）教授の指導の下に行った博士学位研究で，「乱流の発生理論」に関するものである．これは 1924 年に，ドイツの権威ある学術誌 *Annalen der Physik, Leipzig* に発表されている．

後期のものは，1945 年の第二次世界大戦でのドイツ敗戦の直後に，ハイゼンベルクが英国のケンブリッジに保護抑留されていた時期に，僚友のワイツゼッカー（C.F. von Weizsäcker）と共に行った「乱流の統計理論」の研究である．これは，前期の業績ほど本格的ではないが，コルモゴロフ（A.N. Kolmogorov）の「局所相似性」[6] の概念に沿って，物理的意味の明確なエネルギー・スペクトル方程式を与えたことが高く評価された．

ハイゼンベルクを世界的に有名にした「量子力学」に関する画期的な業績は，まさにこれらの「流体乱流」の研究に関する二つの時期の中間に存在したのである．このことは，彼の科学的視野の広さと物理的直観の卓抜さを如実に物語るものと言えよう．

2. 乱流の発生理論におけるハイゼンベルク

「乱流」（turbulence）は，大気中の空気の流れや，海洋の水の流れにおける乱雑な運動であって，われわれが最も頻繁に経験する「流体」の運動形態である．

「乱流」の組織的な研究は，実験的には有名なレイノルズ（O. Reynolds）の円管流の実験[13] と，テイラー（G.I. Taylor）の回転同軸円筒流の実験[18] を嚆矢とし，理論的にはオア（W. McF Orr）[12] と前述のゾンマーフェルトによる撹乱方程式[14] の定式化に始まると言われている．ハイゼンベルクの前期の乱流研究は，まさに，この「オア-ゾンマーフェルト方程式」による乱流発生論の研究なのである．

2.1 レイノルズの実験

レイノルズの実験は，原論文の芸術的な図を再録した図 1 に示すような，水槽を用いて行われた．右手の長い棒を動かして水栓を開けると，水槽の水はラッパ形の入り口から円管に入って，管内を流れ去る．水面の浮子の降下速度から，水の流量，すなわち管の断面内の平均速度が分かる．左手のフラスコに赤い色素溶

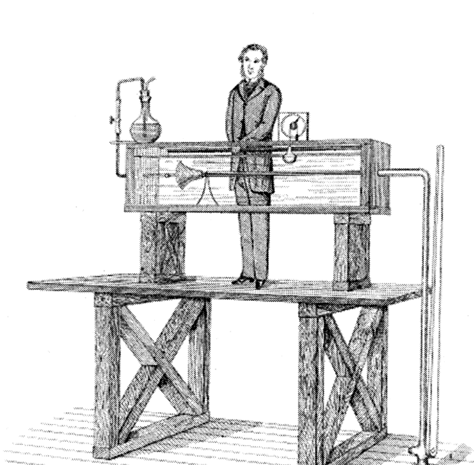


図 1　レイノルズの実験（文献 13) による）．

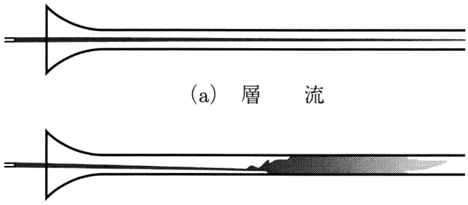


図 2 層流 (a) と乱流 (b)（文献 13) による）.

液が入っており，これを管の入り口に注入して，下流の状態を調べる．

水流の平均速度が低い間は，色素は，図 2 (a) のように管の軸に平行な筋となって流れる．これを**層流**（laminar flow）という．これに対して，平均速度がある程度以上に高くなると，色素は，図 2 (b) のように管全体に拡がる．これを**乱流**（turbulent flow）という．

この層流から乱流への移り変わりを，**遷移**（transition）と呼ぶ．この遷移の実験を，大小様々な管について行うと，遷移は常に一つの無次元数，

$$R=\frac{U_0 L\rho}{\mu}=\frac{U_0 L}{\nu}, \qquad (1)$$

の特定の値において起こることが分かる．ここに，U_0 は水の平均速度，L は円管の半径，ρ は水の密度，μ は水の粘性率を表し，$\nu=\mu/\rho$ を動粘性率という．

この (1) 式で定義された無次元数 R を**レイノルズ数**（Reynolds number）といい，遷移を引き起こす R の値 R_c を**臨界レイノルズ数**（critical ——）という．

臨界レイノルズ数 R_c の数値は，一つの実験装置については一意的に決まるが，管の入口のラッパ管の形状を変えると，かなり変化する．これは，遷移の発生が，水が管口に入る際にできる渦などの撹乱の大小に依存することを示している．これまでの実験結果では，撹乱が大きくなると R_c の値は小さくなるが，約 2,000 以下にはならない．一方，撹乱を小さくすると R_c の値は大きくなるが，約 20,000 以上にはならない．

2.2 層流安定性理論

上に述べたように，遷移の現象は極めて複雑で，理論の対象としては分類と整理を必要とする．まず，外部撹乱が小さい場合には，「遷移」は層流の微小撹乱に対する不安定性によって起こると考えられるから，層流の線形安定性問題として数学的一般論が可能である．これに対して，外部撹乱が大きい場合には，撹乱と層流との非線形相互作用が重要であるから，その取扱いは，個々の層流と撹乱に関する非線形理論とならざるを得ない．したがって，ここでは前者の場合を考え，これを**層流安定性理論**という．

いま，流体は非圧縮・粘性流体であるとすると，空間点 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$ における流体の速度 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ の時刻 t における変化は，次のナビエ・ストークス（Navier–Stokes）運動方程式 (2) と非圧縮条件 (3) に従う．

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+\left(\boldsymbol{u}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{u}-\nu\left|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^2\boldsymbol{u}=-\frac{\partial(p/\rho)}{\partial \boldsymbol{x}}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{u}=0. \qquad (3)$$

ここに，$p(\boldsymbol{x},t)$ は流れの圧力，ρ は流体の密度，ν は動粘性率を表す．

一般の乱流においては，速度場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ は，**平均流** $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)$ と**変動流** $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)$ からなるものとして，次のように表す．

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)+\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t),$$
$$\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)=\langle\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\rangle, \quad \langle\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)\rangle=0. \qquad (4)$$

ここに，$\langle\ \rangle$ は，記号内の変数の確率分布に関する平均を表す．

平均流と変動流のそれぞれを支配する方程式は，(4) の第一式を (2) 式に代入し，第二，三式を考慮して次の様に得られる．

平均流：
$$\frac{\partial \bar{\boldsymbol{u}}}{\partial t}+\left(\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\bar{\boldsymbol{u}}+\left\langle\left(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\hat{\boldsymbol{u}}\right\rangle$$
$$-\nu\left|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^2\bar{\boldsymbol{u}}=-\frac{\partial(\bar{p}/\rho)}{\partial \boldsymbol{x}}, \qquad (5)$$
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\bar{\boldsymbol{u}}=0. \qquad (6)$$

変動流：
$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{u}}}{\partial t}+\left(\bar{\boldsymbol{u}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\hat{\boldsymbol{u}}+\left(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\bar{\boldsymbol{u}}$$
$$+\left(\hat{\boldsymbol{u}}\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\hat{\boldsymbol{u}}-\nu\left|\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\right|^2\hat{\boldsymbol{u}}$$
$$=-\frac{\partial(\hat{p}/\rho)}{\partial \boldsymbol{x}}, \qquad (7)$$
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{u}}=0. \qquad (8)$$

層流安定性理論においては，変動流は平均流に比べて微小であるとして，その二次の項を無視するから，平均流に対する (5) 式は，層流に対する (2) 式と同一となる．一方，対象となる層流も，レイノルズの実験の円管流ではなく，その二次元版である二枚の平行平板 $x_2=\pm L$ の間の**二次元平行流**，

$$\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)=(U(x_2),0,0), \qquad (9)$$

を考える．また，撹乱速度 $\hat{\boldsymbol{u}}=(\hat{u}_1,\hat{u}_2,\hat{u}_3)$ も，簡単のために (x_1,x_2) 面内の二次元速度とし，流れの関数

$\psi(x_1, x_2, t)$ を用いて，次のように表す．

$$\hat{u}_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \hat{u}_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \quad \hat{u}_3 = 0. \qquad (10)$$

一般に，ψ の関数形は任意であるが，線形方程式の解の独立性によって，それを x 軸方向にフーリエ級数，

$$\psi(x_1, x_2, t) = \sum_{\alpha} \varphi(\alpha, x_2, t) \exp[\mathrm{i}\alpha(x_1 - ct)],$$

$$\mathrm{i} = \sqrt{-1}, \quad \alpha = \frac{2\pi n}{L}, \quad n: \text{正整数}, \qquad (11)$$

で表し，そのうち任意の波数 α の成分 φ を取扱えば十分である．なお，複素表示の関数は，その実数部が物理的意味をもつものと規約する．

(11) 式の最後のパラメーター c は，一般に複素数 $c = c_r + \mathrm{i}c_i$ で，その実数部 c_r は波数 α の成分の位相速度を，虚数部に比例する αc_i は時間的変化率を表す．したがって，$c_i > 0$ の場合には撹乱は時間的に増大し，$c_i < 0$ の場合には時間的に減少する．

以上のような理論構成に従って，(11) 式で表される正弦波撹乱 $\varphi(\alpha, x_2, t)$ を支配する方程式として導かれたのが，先に述べた「オアーゾンマーフェルト方程式」で，その方程式と境界条件は，それぞれ，次のような無次元形で表される．

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = \frac{1}{\mathrm{i}\alpha R}(\varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi), \qquad (12)$$

$$x_2 = \pm 1 \text{ において}, \ \varphi = \varphi' = 0. \qquad (13)$$

ここに，式中の変数はそれぞれ，代表的な速さ U_0 と長さ L に関して無次元化したものを，同じ記号を用いて表し，ダッシュは無次元座標 x_2 に関する微分を表す．

いま，与えられた層流に対して，(12), (13) 式の境界値問題を解いた結果，パラメター (α, R) のある値に対して，$c = c_r + \mathrm{i}c_i$ の固有値が決まったとする．そこで，(α, R) 面上で増大撹乱 $c_i > 0$ が占める領域を**不安定領域**，減少撹乱 $c_i < 0$ の占める領域を**安定領域**と呼ぶとすれば，両領域の境界曲線 $c_i = 0$ は**中立曲線**を与える．

2.3 ハイゼンベルクの層流安定性理論

このような理論構成の下に，層流安定性理論に初めて取り組んだのが，ハイゼンベルク[2)]である．彼の乱流発生論への関心は，ゾンマーフェルト教授から与えられた博士学位論文の主題によるものと思われる．

彼は，層流として，円管流の二次元形である「二次元ポアズイユ流」の放物線速度プロフィル，

$$U(x_2) = 1 - x_2^2, \quad -1 \leq x_2 \leq 1, \qquad (14)$$

を用い，これに対して，方程式 (12) と境界条件 (13) からなる境界値問題を構成し，それを解いた．彼がこの境界値問題に対して行った解析は本格的で，その結果は，ドイツの学術誌，*Annalen der Physik, Leipzig* に，“Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen” と題する 51 頁の論文として発表されている．結果として，彼は図 3 に示すような (α, R) 面上の**中立曲線** ($c_i = 0$) を得た（この図は原論文の図をもとに作成した）．

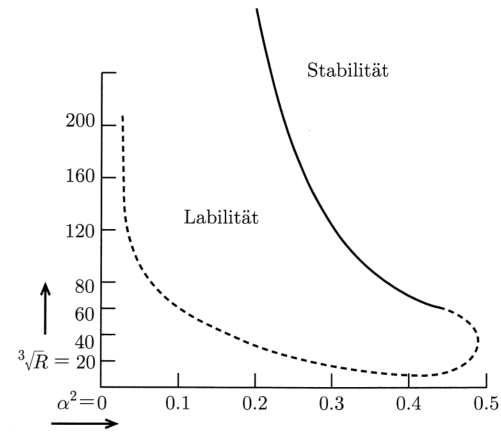


図 3　二次元ポアズイユ流の中立曲線（文献 2) による）．

図 3 は，後に図 4 に示すような，層流のレイノルズ数 R を横座標，撹乱の波数 α を縦座標とする (α, R) 図とは異なり，$R^{1/3}$ を縦座標，α^2 を横座標とする $(R^{1/3}, \alpha^2)$ 図となっている．

さて図 3 では，中立曲線 $R(\alpha)$ の上側の部分を太い実線で，それに続く下側の部分を破線で表しているが，これについて，ハイゼンベルクは次のように述べている（省略部分を（– –）で示す）．

“われわれは，不安定振動が安定となる，すなわち c の虚数部が 0 となる R の限界値に興味をもつ．この限界値 R は，当然 α に依存する．したがって，c を実数とおけば，R の限界値 R を α の関数として表すことができる．この $R(\alpha)$ 曲線上の R の最小値が，放物線速度プロフィルに対する**臨界レイノルズ数**を与える．

さて，計算結果から言えることは，安定性方程式（– –）からは，中立曲線 $R = R(\alpha)$ の上部（図 3 で強調した）しか得られないことである——本節における考察から期待できることは，曲線 $R = R(\alpha)$ の下部は，

他の近似解（– –）を漸近解（– –）として用いることによってのみ得られるということである．(– –).

臨界レイノルズ数は，まさに漸近解が有効性を失う領域に対応しており，そこで粘性の果す役割は極めて微妙で，その機構について簡単な直観的図式を与えることはできない．曲線 $R = R(\alpha)$ の下部（図 3 に破線で示す）に対しては，定量的な結果を導くには余りにも粗い評価しか行うことができないが，曲線の定性的な様子は完全に再現可能である．

図 3 から，次のことが分かる．

1) 不安定性の上方限界を与える α の最大値と，下方限界を与える R の最小値は，共に存在する．

2) ある一定の R の値に対しては，α の最大値も最小値も共に存在し，それらの値の内部が**不安定**，外部が**安定**である．

3) α の最大値は約 $\alpha = 0.7$ $(\alpha^2 = 1/2)$ である．R の最小値は 10^3 の程度であるが，より正確な最小値を図から求めることは不可能である．”

以上に要約したハイゼンベルクの理論的結果は，**二次元ポアズイユ流**が，十分に高いレイノルズ数 R の値において**中立曲線**をもち，したがって**不安定**であることを初めて示したもので，原理的には注目に値する結果である．しかし，彼の中立曲線は R の高い値に止まり，**臨界レイノルズ数** R_c を導くには至らなかった．

中立曲線の全像は，戦後になって，リン（C.C. Lin）によって求められ[8]，後に得られた $c_i > 0$ の不安定曲線と共に図 4 に示されている．臨界レイノルズ数は，波数 $\alpha = 1.0$ に対して $R_c = 5{,}300$，と与えられている．この結果を見ると，ハイゼンベルクが，当時用いた漸近解法の精度不足によって，二次元ポアズイユ流

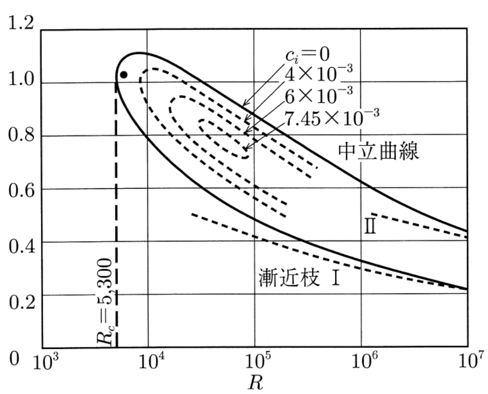


図 4　二次元ポアズイユ流の中立曲線と不安定曲線群（文献 8) その他による）．

の臨界レイノルズ数を導く栄を逸したことは，痛恨の極みであった．しかし彼の予想によって導かれた中立曲線の破線部分が，後に計算によって得られた中立曲線と“当たらずといえども遠からず”の範囲にあることは，彼の抜群の直観的構想力を示すものと言えよう．

3. 乱流の統計理論におけるハイゼンベルク

われわれが，ハイゼンベルクを再び乱流研究の分野において見るのは，冒頭に述べた彼のケンブリッジ滞在の時期であって，彼はテイラーやバチェラー（G.K. Batchelor）と共に，乱流研究の日々を過ごしたとされている．この時期の研究分野は，もはや「層流安定性理論」ではなく「乱流の統計理論」，とくに「一様等方性乱流の理論」であった．

一様等方性乱流の概念は，テイラー[19]によって導入されたもので，乱流の具体性に煩わされない単純モデルとして，大方の関心を集めていた．一方，コルモゴロフ[6]は，個々の乱流に普遍的に存在する微細構造を追求する立場から，「局所等方性乱流」の概念を導入し，当時，乱流の基礎的研究は，この両概念のもとに，大きな高まりを見せつつあったように思われる．

ハイゼンベルクのケンブリッジにおける乱流研究は，彼にとって受動的なものであったかも知れないが，それにしても，当時の乱流研究の問題点を一瞬にして把握し，直ちに第一線に加わられた手腕は敬服の他はない．

3.1 乱流の完結問題

レイノルズの実験以来，乱流研究者の関心は一貫して「平均速度」および「平均速度積」にあったと言える．レイノルズの実験においても，図 2 (b) における乱流の「平均速度プロフィル」が，層流の「放物線速度プロフィル」と，どう違うのかが問題で，その違いを説明するために，「混合距離」や「乱流粘性」といった現象論的な概念が導入された．

一方，演繹論的な面では，平均速度 $\bar{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t)$ を求めるために，それを支配する (5) 式を解こうとすると，同式には，変動速度 $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t)$ の平均積という別の未知数が存在するために，このままでは解けない．それでは，その平均速度積を求めるために (7) 式を解こうとすると，そこには三次の平均速度積が存在するために，やはり解けない．この非完結性は，運動方程式 (2) の非線形性に基づくもので，どこまでも終わらない．この非完結性を打開するには，方程式の中で最高次の平均速度積を低次のもので表す，「完結仮説」を導入する

必要がある．これが，乱流の「完結問題」である．

3.2 一様等方性乱流のエネルギー・スペクトル

一様等方性乱流では，一般性を失うことなく $\bar{\boldsymbol{u}}=0$ とおけるから，変動速度 $\hat{\boldsymbol{u}}$ に対する (7) 式は元の速度 $\boldsymbol{u}$ に対する (2) 式に帰着する．そこで，速度場 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ のフーリエ変換，

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)=\int\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k},t)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{k}, \tag{15}$$

を考えれば，基礎方程式 (2) 式のフーリエ変換は次のように表される．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu k^2\right)\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k},t)=-\mathrm{i}\int(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}',t))\times\left[\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}',t)-\frac{\boldsymbol{k}}{k^2}(\boldsymbol{k}\cdot\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k}',t))\right]\mathrm{d}\boldsymbol{k}'. \tag{16}$$

ここに，(2) 式の圧力項は (3) 式を用いて消去されており，(2) 式での $\partial/\partial\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{k}$ との積で置き代えられていることが分かる．この意味で (16) 式は，一様等方性乱流の波数空間における決定論的な基礎方程式を与える．

一様等方性乱流においては，一次の平均速度 $\bar{\boldsymbol{u}}$ は 0 であるから，最低次の平均速度積は二次，三次のものであり，一般にテンソルとして次のように定義できる．

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{k},t)=(2\pi)^{-3}\int\langle u_i(\boldsymbol{x},t)u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)\rangle\times\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{17}$$

$$\Psi_{ijk}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}';t)=(2\pi)^{-6}\iint\langle u_i(\boldsymbol{x},t)u_j(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r},t)u_k(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}',t)\rangle\times\exp[-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'. \tag{18}$$

さらに，これらのテンソルの等方形を用いると，次のようにスカラー関数で表される．

$$\Phi_{ij}(\boldsymbol{k},t)=\Phi(k,t)\Delta_{ij}(\boldsymbol{k}),\quad \Delta_{ij}(\boldsymbol{k})=\delta_{ij}-\frac{k_ik_j}{k^2}, \tag{19}$$

$$\int\Psi_{ijk}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}';t)\mathrm{d}\boldsymbol{k}'=-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\Psi(k,t)\{k_i\Delta_{jk}(\boldsymbol{k})+k_k\Delta_{jk}(\boldsymbol{k})\}. \tag{20}$$

以上の定義式から明らかなように，$\Phi(k,t)$ は，三次元の $\boldsymbol{k}$ 空間において，原点から $k=|\boldsymbol{k}|$ の距離にある単位体積に含まれるエネルギーの量を表し，これを**エネルギー・スペクトル密度**という．これに対して，$\Psi(k,t)$ は，その単位体積から全波数空間に向かって単位時間内に伝達されるエネルギー量を表し，**エネルギー伝達密度**という．

このとき，これらの二次，三次の平均速度積を支配する方程式は，次のような簡単な形に表される．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu k^2\right)\Phi(k,t)=k\Psi(k,t). \tag{21}$$

これを，**エネルギー・スペクトル方程式**という．

乱流の文献では，しばしば上記の Φ, Ψ に代えて，

$$E(k,t)=4\pi k^2\Phi(k,t),\quad T(k,t)=4\pi k^3\Psi(k,t), \tag{22}$$

が用いられ，$E(k,t)$ を**エネルギー・スペクトル関数**，$T(k,t)$ を**エネルギー伝達関数**と呼ぶ．それらの物理的意味は，それぞれ定義から明らかであろう．

エネルギー・スペクトル方程式 (21) は，これらの関数を用いて次のように書ける．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+2\nu k^2\right)E(k,t)=T(k,t). \tag{23}$$

方程式 (21), (23) は，いずれも一様等方性乱流の統計理論の中核をなす重要な方程式であるが，(21) 式では関数 $\Phi(k,t)$ と $\Psi(k,t)$ との関係，(23) 式では関数 $E(k,t)$ と $T(k,t)$ との関係が分からない限り，解くことができない．これが，3.1 節に述べた乱流の「完結問題」の典型例で，当時の研究者の最大の問題であった．ハイゼンベルクにとって，「乱流」が再び関心事となったのは，丁度この時期であった．

3.3 ハイゼンベルクのエネルギー・スペクトル

当時のハイゼンベルクの研究については，バチェラーの著書 “Homogeneous Turbulence”[1)] に，かなり詳しく紹介されている．

まず，完結の便宜上，(23) 式を次の形に書く．

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^k E(k'',t)\mathrm{d}k''=-2\nu\int_0^k k''^2E(k'',t)\mathrm{d}k''-S(k,t), \tag{24}$$

$$S(k,t)=\int_0^k T(k'',t)\mathrm{d}k''. \tag{25}$$

ここに，$S(k,t)$ は，$T(k,t)$ の定義により，一次元波数 k'' の空間内で，波数が k より小さい領域から，k より大きい領域へのエネルギーの伝達率を表す．

方程式 (24) は，(23) 式と同様に完結していないため，このままでは解けないが，もし，関数 $S(k,t)$ が $E(k,t)$ と関係付けられれば，解くことができる．そこで，ワイツゼッカー[20)] によって考案され，ハイゼンベルク[3)] によって数式化されたのが，以下に述べる関係式である．

まず，『乱流における大きい渦（小さい k）から小さい渦（大きい k）へのエネルギー伝達の過程は，流体における力学的エネルギーの，分子運動による熱エネルギーへの変換と質的に相似である』と考える．

分子運動によるエネルギー変換率は，分子粘性率 ν と，流体運動の平均二乗渦度との積で与えられる．そうだとすると，大きい渦から小さい渦へのエネルギー変換率は，小さい渦の運動によって作られる実質的な粘性率 $\mathrm{N}(k)$（N は ν の大文字）と，大きい渦がもつ平均二乗渦度との積で与えられると考えられるから，次のように表される．

$$S(k,t)=\mathrm{N}(k)\int_0^k 2k''^2E(k'',t)\mathrm{d}k''. \qquad (26)$$

一方，実質粘性 $\mathrm{N}(k)$ については，波数 $k'=k$ から $k'=\infty$ までの全波数成分が平等に寄与するとすれば，$\mathrm{N}(k)$ は $E(k',t)$ と k' のみに依存するから，次元的に，

$$\mathrm{N}(k)=\gamma\int_k^\infty k'^{-3/2}[E(k',t)]^{1/2}\mathrm{d}k', \qquad (27)$$

と書ける．この (26), (27) 式から，直ちに次の関係式 (28) が結論される．

$$S(k,t)=\gamma\int_k^\infty k'^{-3/2}[E(k',t)]^{1/2}\mathrm{d}k' \times\int_0^k 2k''^2E(k'',t)\mathrm{d}k''. \qquad (28)$$

さて，方程式 (24) と関係式 (28) から，次のような完結した方程式が得られる．

$$\varepsilon=\left[\nu+\gamma\int_k^\infty k'^{-3/2}[E(k',t)]^{1/2}\mathrm{d}k'\right] \times\int_0^k 2k''^2E(k'',t)\mathrm{d}k''. \qquad (29)$$

ここに，

$$\varepsilon=-\frac{\partial}{\partial t}\left\langle\frac{1}{2}|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|^2\right\rangle=\int_0^\infty 2k^2E(k,t)\mathrm{d}k \qquad (30)$$

は，一様等方性乱流の平均エネルギー散逸率を表す．

さて，ここで局所平衡性を仮定すれば，(29) 式内の変数はすべて時間的に不変となるから，同式は解析的に解くことができ，解は次式で与えられる．

$$E(k)=\left(\frac{8\varepsilon}{9\gamma}\right)^{2/3}k^{-5/3}\left[1+\left(\frac{8\nu^3}{3\gamma^2\varepsilon}\right)k^4\right]^{-4/3}. \qquad (31)$$

解 (31) は，低波数の領域 $k\ll(8\nu^3/3\gamma^2\varepsilon)^{-1/4}$ においては，**慣性小領域スペクトル**，

$$E(k)=\left(\frac{8\varepsilon}{9\gamma}\right)^{2/3}k^{-5/3}, \qquad (32)$$

に一致し，他方，高波数の領域 $k\gg(8\nu^3/3\gamma^2\varepsilon)^{-1/4}$ においては，**粘性小領域スペクトル**，

$$E(k)=\left(\frac{\gamma\varepsilon}{2\nu^2}\right)^4k^{-7}, \qquad (33)$$

を与える．

私は，以上の結果を，ハイゼンベルクの論文[4]を通じて知ったとき，その立論の論理性と結果の美しさに深い感銘を受けた．そして「一様等方性乱流の理論」はこれで終わった，との印象を深くした．しかし，この印象が，必ずしも乱流理論の専門家によって共有されていないことは，上述のバチェラーの著書[1]の第 6 章「普遍平衡理論」において，ハイゼンベルク理論の積極的評価と共に，その内部矛盾を指摘していることからも明らかである．しかし，この理論が，現行の揺れ動く現象論のただ中にあって明快な論理で一貫していることは見事という他はない．

3.4 乱流の統計諸理論

ハイゼンベルク理論以外の統計理論は，一般に，エネルギー・スペクトル方程式 (23) の他に，エネルギー伝達関数 $T(k,t)$ に対する方程式を導き，この 2 つの方程式に完結仮説を適用して問題を解く方法をとる．このとき，理論は方法論的に二つに別かれる．

一つは，エネルギー保有領域におけるエネルギー分布が近似的に正規であると仮定する遣り方で，これを「準正規近似（QN）」という．もう一つは，エネルギー伝達項で表される波数間の相互作用のうち，直接相互作用だけを考慮する遣り方で，これを「直接相互作用近似（DI）」という．いずれも初期の理論は不完全で，その後，様々な改良の結果，一貫性のある有用な理論に成長したと思われる．これらの理論の詳細については，例えば前者（QN）は文献 7)，後者（DI）は文献 10) の各著書を参照されたい．

4. 乱流の非平衡統計力学

これまでの乱流理論において，速度分布関数が登場することは数少ないが，それでも，速度場の特性汎関数を支配する方程式がホップ（E. Hopf）[5]によって与えられ，さらにその展開として，多点速度分布および特性関数を支配する無限個の方程式系が，ラングレン（T.S. Lundgren）[9]と，モーニン（A.S. Monin）[11]に

よって，互いに独立に与えられている．

4.1 多点速度分布方程式

いま，有限整数 n 個の点 $(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n)$ および時刻 t における速度 $(\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}_1,t),\cdots,\boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}_n,t))$ の結合確率分布を次のように定義する．

$$f^{(n)}(\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n;\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n;t) = \langle\delta(\boldsymbol{u}_1(\boldsymbol{x}_1,t)-\boldsymbol{v}_1)\cdots\delta(\boldsymbol{u}_n(\boldsymbol{x}_n,t)-\boldsymbol{v}_n)\rangle. \quad (34)$$

ここに，$\boldsymbol{v}_m$ は速度 $\boldsymbol{u}_m(\boldsymbol{x}_m,t)$ $(m=1,\cdots,n)$ に対応する確率変数を，$\langle\ \rangle$ は確率平均を，δ は三次元デルタ関数を表す．

一般に，n 点速度分布関数に対する方程式は，ラングレンとモーニンによって与えられているが，それらは常に $(n+1)$ 点速度分布関数を含むために，閉じていない．したがって，この方程式系を閉じさせるためには，何らかの仮説を必要とする．これは，3.1 節で述べた「完結問題」と同一である．ただ違うのは，先の完結問題では，次数の異なる速度積は互いに「非線形」の関係にあったが，今回の完結では，点の数が異なる速度分布は互いに「線形」の関係にあるため，取扱いが遙かに容易である．

4.2 交差独立性完結理論

いま，一点分布 $f(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{x}_1,t)$ と二点分布 $f^{(2)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2;\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2;t)$ との関係を考えると，最も簡単な関係は独立関係で，

$$f^{(2)}(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2;\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2;t)=f(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{x}_1,t)f(\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{x}_2,t), \quad (35)$$

で表される．この独立関係 (35) は，二点間の距離 $r=|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|$ が大きいときには漸近的に成立するが，距離が小さい場合には一般に成立しない．

ここで，二点速度の和 $\boldsymbol{u}_+=(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)/2$ と，差 $\boldsymbol{u}_-=(\boldsymbol{u}_2-\boldsymbol{u}_1)/2$ をとり，これらの「交差速度」$\boldsymbol{u}_\pm$ の一次分布 $g_\pm(\boldsymbol{v}_\pm;\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2;t)$ と二次分布 $g^{(2)}(\boldsymbol{v}_+,\boldsymbol{v}_-;\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2;t)$ をとり，両者の間に (35) 式と同様の「交差独立関係」，

$$g^{(2)}(\boldsymbol{v}_+,\boldsymbol{v}_-;\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2;t) = g_+(\boldsymbol{v}_+;\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2;t)g_-(\boldsymbol{v}_-;\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2;t), \quad (36)$$

を考えることができる[15]．この交差独立関係 (36) は，独立関係 (35) とは違って，距離 r が大きい場合と小さい場合に漸近的に成立し，中間の場合には一般に成立しない．この r が小さい場合の有効性が，今回の完結においては必要かつ十分であり，これによって，今の場合の交差独立性完結は，厳密な関係であることが示される[16]．

5. 結びの言葉

ハイゼンベルクの，これまでの二回にわたる乱流研究への大きな貢献と，それに対する斯界の反応を顧みるとき，私には，彼がある満足感をもってこれらの時期を終えたであろうとは想像できない．それは誰が悪いのでもない．ただ，時期的なミス・マッチであったとしか言いようがない．

しかし，いまや乱流理論も合理的現象論の域を脱して，「非平衡統計力学」としての本格的な進展を見せつつある．この時期なら，ハイゼンベルクも，水を得た竜のように，その天才を縦横に発揮し得たのではないだろうか．そんな勝手な空想を以て，本稿を終わる．

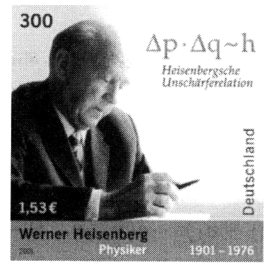
参考文献

1) Batchelor, G.K. *The Theory of Homogeneous Turbulence.* Camb. Univ. Pr. (1953).
2) Heisenberg, W. *Ann. Phys. Lpz.* (4) **74**, (1924) 577–628.
3) Heisenberg, W. *Z. Phys.* **124**, (1948) 628.
4) Heisenberg, W. *Proc. Roy. Soc. A*, **195**, (1948) 402.
5) Hopf. E. *J. Rat. Mech. Anal.* **1**, (1952) 87–123.
6) Kolmogorov, A,N. *C.R. Acad. Sci. URSS*, **30**, (1941) 301–305.
7) Lesieur, M. *Turbulence in Fluids.* Kluwer Acad. Pub. (1993).
8) Lin, C.C. *Quart. App. Math.* **3**, (1945) 117, 218, 277.
9) Lundgren, T.S. *Phys. Fluids*, **10**, (1967) 969–975.
10) McComb, W.D. *The Physics of Fluid Turbulence.* Oxf. Univ. Pr. (1990).
11) Monin, A.S. *PMM J. Appl. Math. Mech.* **31**, (1967) 1057–1068.
12) Orr, W. McF. *Proc. Roy. Irish Acad. A*, **27**, (1906) 9, 69.
13) Reynolds, O. *Phil. Trans.* **174**, (1883) 935.
14) Sommerfeld, A. *Proc. 4^{th} Intern. Congr. Math. Rome*, (1908) 116.
15) Tatsumi, T, In Kambe, T. *et al.* eds. *Geometry and Statistics of Turbulence.* Kluwer Acad. Pub. (2001) pp.3–12.
16) Tatsumi, T. *J. Fluid Mech.* **670**, (2011) 365–403.
17) 巽，後藤『流れの安定性理論』，産業図書 (2008).
18) Taylor, G.I. *Phil. Trans. A*, **223**, (1923) 289.
19) Taylor, G.I. *Proc. Roy. Soc.* **151**, (1935) 421.
20) Weizsäcker, C.F. *Z. Phys.* **124**, (1948) 614.

（たつみ・ともまさ，京都大学名誉教授）

特集／ハイゼンベルク

素粒子の統一場理論



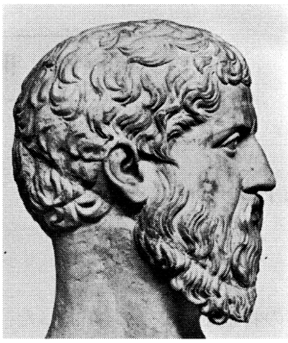
ハイゼンベルクの生誕百年記念切手．不確定性原理の式 $\Delta p \cdot \Delta q \sim h$ がデザインされている．

山崎　和夫

物質を細かく細かく分割していけば，結局どうなるか？ 限りなく分割可能か，そうでなければどこかでそれ以上分割不可能な限界の物に行き着くはずで，後者を約 2500 年昔のギリシアの哲学者デモクリトスは atom（原子）と名付けた．ギリシア語の原語では文字どおり a = not or un, tom = dividable であった．当時は頭で考えただけの哲学であったが，それがデモクリトスの原子論であった．その現代版が今日の素粒子論であるのだが，実験という強力な実証手段を基礎にした近代自然科学でも，この問題はデモクリトス流で進められ，19 世紀になって先ず化学が分子に行き着いた．やがて全ての分子は 92 種類の原子の組み合わせで構成されていること，20 世紀になると原子は原子核と電子という部分から成り，更に原子核は陽子と中性子という部分から成り立つことが解った．そこで陽子，中性子，電子，それに光子を加えてこの 4 種類の素粒子こそ，デモクリトスの予言した不可分な原子であると，古き良き 1930 年代には信じられていた．しかし湯川中間子（今日のパイオン），次にミュー粒子，そして 40 年代からは新粒子の発見が相次ぎ，やがてこれらの素粒子の種類は 100 を遙かに超えるに至った．そこで歴史は再び繰り返して，これらの各素粒子（全体）を構成している部分として，クォークが考えられた．今では 99%の素粒子学者が支持するこのクォーク説にハイゼンベルクは待ったをかけた．彼の反対の論拠は二つある．その一つは，巨大加速器で光速に近い超高速に加速した素粒子（全体）を別の標的の素粒子（全体）に衝突させると，それらは確かに粉々に割れて破片（部分）が辺り一面に裂け飛ぶ．しかしそれらの破片をよく調べてみると上記の 100 種類の素粒子のどれかであって，クォークなど素粒子とは質的に違った粒子は見つかっていない．おびただしい新発生の破片の質量エネルギーの合計は超高速に加速された元の素粒子の運動エネルギーが変形した物として説明できる．つまり素粒子（全体）はやはりその破片（部分）である素粒子で構成されている．だから素粒子の段階では，「部分と全体の区別が付けられない」故に素粒子では，何かを分割する，あるいは何かは別のもっと小さいより根源的な何かで構成されている，と言う言葉が意味を失う．ハイゼンベルクの



デモクリトス．



プラトン．

言葉では「素粒子を分割するとどうなるか？」とか「素粒子の構成要素は何か？」等と言う設問の仕方が間違っている[2]，となる．クォーク説は素粒子の段階ではもはや通用しないデモクリトス哲学に基づく誤った設問の仕方の結果だ，と言うのである．このことを含めて『部分と全体』という自著のタイトルにして，あくまでも主張したかったのではないか，と，私は推測する．

二つ目は，デイラックによる反物質（反粒子）の存在の予言とその実証によって，（素）粒子と複合粒子の区別が原理的に付けられないことによっている．その事実を見事に説明している 1929 年のハイゼンベルクとパウリの「場の量子論」では，量子場の性格上裸の粒子は存在し得ず，必ずその周りには何個かの仮想的（バーチュアル）な粒子と反粒子の対が存在し，いわゆる着物を着た粒子の状態でしか素粒子は存在し得ない．その着物を着た状態の素粒子が観測にかかる素粒子であり，繰り込み理論はまさしくそれを実証した（ラム・シフトの実験値など）．ハイゼンベルクの言葉では「もし仮にクォークが存在したとしても陽子は 3 個のクォークから成り立っていると言うことはできず，陽子は時としては 3 個のクォークから成り立っているかも知れないが，それはまた時としては 4 個のクォークと 1 個の反クォーク，あるいは 5 個のクォークと 2 個の反クォーク，等々から成り立っていると言うべきです．…（略）…更にまた 1 個のクォークは 2 個のクォークと 1 個の反クォーク等々から成り立っているだろうからです．この基本的な状況から逃れることはできません」[2]と．ましてクォークが近距離で強い引力で引き合うならば，それらは団子状になってまさしく粒子という概念で表せない何かになってしまいそうである．こうして粒子像では素粒子まで行き着くと，それ以上は先に進めない概念である．それではクォークその他（単体では）未発見の粒子を仮定して多くの実験の説明に成功しているのは何故か？ ハイゼンベルクによれば，それらは実験を説明するのに数学的に便利なものではあっても，物理的実在とはいえない．それらは粒子という概念では表せない物である．それではここで行き詰まったデモクリトス流の原子論に代わる物は何か？ プラトン哲学者ハイゼンベルクは，それこそ粒子などのような“物”ではなく“数学的対称性”である，と．故に素粒子から先は動力学を定める実験に合う数学的な対称性を持った基礎方程式の定式化と，その基礎方程式の持つ対称性の南部流（あるいはハイゼンベルク流の真空の縮退の類）の自発的対称性の破れの導入による，実験に合う対称性の破れを，生かすべきであると，彼は主張していた．

そのような試みとしてハイゼンベルクは 1957 年にパウリと協同して，マスコミが宇宙方程式と呼んだ一つの基礎方程式を提唱したが，1958 年にはパウリが離反し（その年の暮れにパウリは亡くなった）彼の率いたミュンヘングループで晩年のほぼ 20 年をその式を基礎とする研究に費やした．自分の健在のうちに，といくらか焦ったのかも知れない．彼はこれこそ素粒子の統一場理論の先駆けであり，その式が正しい式である可能性が高いと，亡くなるまで信じていた．

引用文献

1) W. ハイゼンベルク著，湯川秀樹序，山崎和夫訳『部分と全体』みすず書房 (1974).
2) W. ハイゼンベルク著，H.P. デュル編，山崎和夫訳『科学における伝統』みすず書房 (1978).

（やまざき・かずお，京都大学名誉教授）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

細谷　暁夫

量子力学の創設者の哲学が現在の理論物理学に問うもの

ハイゼンベルクが来日したときに私は学部の学生で，追っかけをした．東大の安田講堂でドイツ語訛りの強い英語で一般講演を聞いたときの強い印象はその哲学性であった．ギリシャ哲学に発する西欧哲学に揺るぎない信念を置いているように見えた．「現代物理学はデモクリトス的であるよりは，ヘラクレイトス的である」とは，多分，場の量子論のことを言ったのだろうと当時ハイゼンベルクとパウリの論文を読んでいたので推察できた．しかし，「理論物理学はギリシャ哲学に発するものなのに，その伝統を持たない日本人の中から湯川，朝永のような一流の研究者が出てくる理由を知りたくて日本に来た」と言ったときには，違うと思った．さらに，当時の教育大学に行き，朝永研究室でのセミナーで「フェルミオン一元論による宇宙方程式」の講演を聴いた．演繹と言うよりは大胆な近似による直観的な講演だった．朝永先生が理路整然と批判的なコメントをして，ハイゼンベルクがそれを集中して聞いていたのが印象的だった．この伝説的な巨人と対等に渡り合う日本人が居るというのを知り衝撃だった．

ハイゼンベルクは父親がギムナジウムの古典の教師であり，青年期に哲学に親しんだこともあり，言わば哲学青年が物理学者になったような人と思う．そして，終生それであり続けた人だったことが，ここに紹介する一般向けの本を読むと鮮明になる．特に『部分と全体』を読むと，1925 年あたりの量子力学の創成期において「観測」とは何か，それと「実在」との関係は何かなどを，創設者たちが懸命に考えていたことが分かる．先輩のボーア，アインシュタインの言葉を引用しながら彼自身の考えの深化を語っている様子は，まるでソクラテスを語るプラトンのようである．例えば，有名な不確定性原理に関する論文はこの背景の中に生まれたのであることはしっかりと押さえておかなければならない，と思う．

今年の 3 月 16 日と 17 日 KEK で行われた研究会「量子論の諸問題と今後の発展」(QMKEK4) で，不確定性関係についての特別セッションがあった．中心は最近の小澤の不等式の実験検証に関する名古屋大学の小澤正直さんとウィーン工科大学の長谷川祐司さんの講演であった．その中でハイゼンベルクの不確定性関係が，量子測定理論の中で捉え直され修正され，実験的に確認された．そのセッションでは，さらに不確定性関係における誤差の定義と意味が吟味されて，日本発の量子力学についての深い理解が始まったと感じた．そもそもハイゼンベルク自身が何を考えていたのかが，会議の中で通奏低音のように語られていたのが印象的だった．私は，ハイゼンベルク自身にとっても 1925 年の論文を書いた当時は曖昧だった，と単純に思っていた．しかし，『部分と全体』を読んでみると，それは浅い見方であったと悟った．「電子は異なる状態を遷移する途中どう振る舞うか？」という，量子力学創設当時の問題意識とハイゼンベルクの哲学的思考が深く関わっていたのだ．

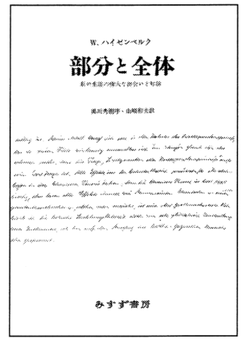
私は，ハイゼンベルクたちが活躍した時代から 100 年後の現在に，彼らが立てた問題が問い直されて量子力学のより深い理解が始まると信じている．そう思ってハイゼンベルクの著作を読むと，細部においても示唆的であり，預言的でさえある．一例として，331 ページにあるハイゼンベルク自身の言葉を引用しよう．

「われわれは飛行機が飛んでいるのをみれば，それが一秒後にどこにいるかを，ある程度正確に前もって計算できる．（中略）しかし，それだけではわれわれは軌道をまだ理解しているとは言えない．あらかじめパイロットと話し合い，彼からその意図する飛行についての説明をうけていたときにはじめて，われわれは本当に軌道を理解したと言えるのだ」

これと最近議論されている，「物理量の真値＝弱値」との符丁をみるのは考え過ぎだろうか？ 5 月 17 日に東工大で行われたアハロノフさんを囲む弱値に関する研究会でその符丁をより強く意識するようになった．

（ほそや・あきお，東京工業大学名誉教授）

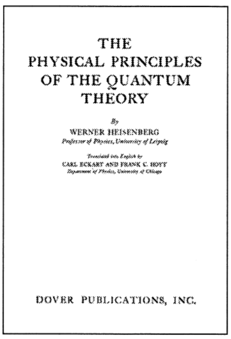
部分と全体　私の生涯の偉大な出会いと対話



W. ハイゼンベルク著，湯川秀樹序，山崎和夫訳，四六判，424 頁，本体 4500 円，
みすず書房，新装版 1999 年（初版 1974 年）

量子力学建設期の巨人たちとの交流をハイゼンベルクが後年再構成して書いたもので，プラトンの「対話篇」を意識したスタイルになっている．訳が優れているためもあり，当時の創造の息吹が感じ取れ，100 年を経た今日量子力学の理解について新展開を予期する志ある者の必読の書と言える．ナチスの時代の暗い影がこの英雄を悲劇的にしている．湯川秀樹の序文は，現代の素粒子論に対する批判と受け取ってもよい．

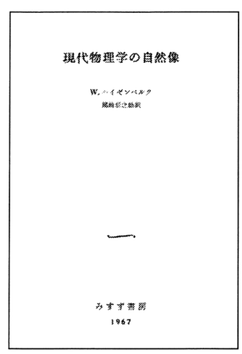
THE PHYSICAL PRINCIPLES OF THE QUANTUM THEORY



W. Heisenberg translated by C. Eckart and F.C. Hoyt, 183p,
Dover Pub., 1949（初版 The University of Chicago Press, 1930）

ハイゼンベルクが 1929 年にシカゴ大学で行った講演録．前半が，粒子と波動の二重性，不確定性関係などの量子力学について基本原理に関するもので，後半は行列力学に関するものが中心である．不確定性関係に関するハイゼンベルク自身の論文が 1927 年であることを考えると言わば「できたて」の内容であった．今日的な観点からすると，電磁場の場合など不確定性関係の適用に問題があるものを挙げているので，吟味すると面白いかもしれない．

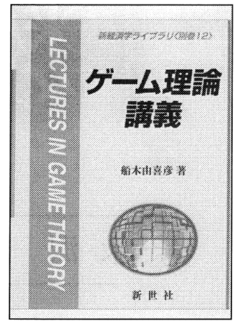
現代物理学の自然像



W. ハイゼンベルク著，尾崎辰之助訳，B6 判，208 頁，みすず書房，新装版 2006 年
（初版 1965 年）

彼自身が建設者の一人である量子力学については認識論的に，それ以前の古典力学から決別しているとしているところがハイライトでもある．しかし，ニュートン的な古典物理に至るまでの科学史については，むしろ山本義隆の『磁力と重力の発見』（みすず書房）のほうが説得力を持つと思う．一方でハイゼンベルクが確固として信奉する西洋哲学に対抗できるだけの強靭な哲学を構築し得ていないことも認めざるを得ない．いろいろ思索を誘う本である．

ゲーム理論講義



船木由喜彦著，A5 判，240 頁，本体 2300 円，新世社

本書は，スタンダードな「ゲーム理論」のテキスト，特に経済学部など文系の学部レベルの学生を主な対象としたテキストである．非協力ゲーム，協力ゲームの両面にわたって，学部レベルで必要な内容が解説されている．文系の学部学生を対象にしながらも，2 変数関数の鞍点を前面に出した 2 人ゼロ和ゲームの均衡の説明，特性関数形ゲーム表現の数学的同等性と解の同等性の確認など，類書ではあまり見られないゲーム理論の数学的枠組みが丁寧に解説されている．定義，定理がすべて数式で厳密に記述されていることと合わせ，理系の学部学生にも読みやすいテキストと言える．内容は，前半が非協力ゲーム，後半が協力ゲームの解説であり，特に協力ゲームについては類書に見られない内容が多く含まれている．ゲーム理論を学ぶ学部学生に，理系，文系を問わず目を通していただきたい一冊である．

2004 年に船木氏により同じく新世社から「演習ゲーム理論」(以下，「演習」と略す）が出版されて以来，同書と補完しあうテキストの出版が待たれていた．それだけに大きな期待を持って本書を手にしたが，本書を単独でテキストに使用するとしても，「演習」と併用して用いるとしても，残念ながら若干の不満が残るというのが率直な感想である．気の付いた点を非協力ゲームと協力ゲームについて各一点，以下に記す．

まず非協力ゲームについては，「情報不完備ゲーム」が省かれている点である．ハルサニのベイジアンゲームによる情報不完備な状況の取り扱いは，経済学において「情報経済学」と呼ばれる新たな分野を創出する基礎となった重要な概念であり，「情報不完備ゲーム」を一つの章として，ベイジアンゲームの定式化，戦略形ゲームにおけるベイジアンナッシュ均衡，展開形ゲームにおける完全ベイジアン均衡による分析を解説していただきたかった．完全ベイジアン均衡は，本書では第 7 章「偶然手番のある展開形ゲームと完全ベイジアン均衡」において定義され，解説されている．ただ，完全ベイジアン均衡は偶然手番を含まないゲームにおいても定義される解であり，このタイトルでは読者が誤解するおそれがある．第 6 章「展開形ゲーム」でサブゲーム完全均衡と並べて定義を与えた方がよかったのではないかと思われる．

協力ゲームについては，理論面においても応用面においてもトピックが多すぎたのではないであろうか．カーネルと整合性公理，破産問題の詳細な説明など類書では見られない話題もあり，それらに触れるだけでも本書を読む価値はあると思うが，もう少しトピックを絞り議論をスリムにした方が，読者には読みやすかったのではないかと思われる．また，「演習」では一つの章をなしていた「マッチングゲーム」が本書では省かれている．確かに船木氏が「はじめに」で述べているように，最近では日本語での解説書も出ているが，マッチングゲームは理論，応用の両面において最近盛んに研究が行われてきたトピックの一つであり，解説を入れておいていただきたかった．

本書の「はじめに」で船木氏が述べているように，「演習」と対をなすという位置づけであるならば，将来，この 2 冊がより有機的に連携するように改訂されることを楽しみにしたい．本書では豊富すぎると思われる協力ゲームのトピックも，理論と応用を分ける，定理の証明で長くなるものは「演習」で解説するなど，本書と「演習」の内容を整理すれば，たとえ本書の内容にマッチングゲームを加えたとしても無理なく解説できると思う．その際，非協力ゲームの構成も合わせて整理し，角谷の不動点定理によるナッシュ均衡の存在証明，無限回繰り返しゲームにおける lim inf を用いた利得など，大学院レベルとも思える内容は岡田章氏の「ゲーム理論」などの上級書に任せて省いてはいかがであろうか．対象を文系の学部学生に絞り，それに適したレベルの内容でまとめた方がよいのではないかと思われる．

武藤　滋夫（東京工業大学大学院社会理工学研究科）

BOOK REVIEW

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

米沢 富美子

1982年9月号

物性物理学の対象となる物質は，大きく分けて結晶と結晶でないものに分類される．結晶でない物質をまとめて「不規則系」または「乱れた系」と呼ぶ．不規則系には，原子の配置が結晶からの何らかのずれとして記述できるものと，そうではないものがある．後者のうち固体に属するものは，構造に結晶の名残りさえないという意味で非結晶物質（非晶質あるいはアモルファス）と命名されている．

「アモルファスの特集を企画してほしい」と30年前に編集部から依頼されたとき，私は「アモルファスは少し時代遅れかも」と考えた．アモルファスの研究は，旬を脱し始めていた．そこでトポロジーという切り口からのアモルファス構造の解析を強調して「構造のトポロジー的な特徴」という副題をつけ，話題をその点に絞って執筆者を選んだ．

規則構造をテーゼに据え，それを壊していくことでアンティテーゼとして乱れを把握する方針（転位の理論：二宮敏行，北原和夫，川村清）に加え，乱れを肯定的概念として捉える方針（ホモトピー群の理論：高野宏）も含めた．相転移における乱れの役割（宮下精二，川村光），物性に反映した乱れの効果（藤原毅夫）も取り上げた．また，トポロジー乱れを形の問題として捉える思想（小川泰）や実験からの夢（長谷田泰一郎）も語ってもらった．

不規則系の構造に共通した事実は，「長距離秩序の欠如」と「短距離秩序の存在」である．しかし短距離秩序に関しては，実験的には原子相関といった1次元的な形でしか得られない．短距離秩序の3次元的な情報や中距離構造が不規則構造の決め手になる．

その解析の手段に使われるコンピュータについては，この30年の間の進歩は予想を超えた著しさで，現在のものと以前のものには，雲泥万里の隔たりがある．かくのごとく向上発展を遂げたコンピュータをもってしても，実は乱れの3次元的な短距離情報や中距離情報に関して，十分なブレークスルーは得られていない．



この状況を背景に，トポロジー的なアプローチの有用性は今も高い．

物理学では，磁化の保存則に見られるトポロジカルな（トポロジー的な）性格や，トポロジカルソリトン，グラフ理論におけるトポロジカルインデックス，さらに一般相対性理論に従う古典的発展ではトポロジカルな変化がない事実など，いくつかの場面でトポロジカルな概念が重要な役割を演じている．

2006年には，トポロジカル絶縁体が発見された．バルクには絶縁体なのに，「エッジ（2次元系なら端，3次元系なら表面）」に金属状態が生じる物質である．

トポロジー的な観点からの研究は，これからもますます重要になり，新しい局面を開いていくだろう．

（よねざわ・ふみこ，慶應義塾大学名誉教授）

不等式による評価

森　真

1. 高校での不等式

高校の教科書では，例えば数研出版の教科書[1)]を見てみると，

- 数学Iでは方程式と不等式，連立不等式の2項目，
- 数学IIでは不等式の証明，不等式の表す領域，関数のグラフと方程式・不等式の3項目，
- 数学IIIでは微分法の応用として，方程式，不等式への応用

とそれぞれに不等式について学ぶようになっています．大雑把にまとめると

- $a<0$ かつ $ab<ac$ ならば，$b>c$ である，といった技術的な項目
- $x^2-5x+6>0$ をみたす x の範囲を求めよとか，$y=x^2$ と $y=e^{-x}$ の囲む図形を図示せよ，といった不等式がみたす範囲を求める項目
- $e^x>1+x$ を証明せよ，といった不等式の証明を行う項目

になるようです．本質的には等号の式を解くのと同じだけれど，マイナスの数をかけるときには不等号の向きが逆になるとか，等号のつかない $<$ と等号のついた $\leqq$ があるとか細かな注意が必要で面倒だなあというのが印象でしょうか．しかし，現代の解析学においては「評価」という形で主要な役割を果たすのです．

悪口をあえて言うならば，高校までの数学は「解ける問題を解く」勉強です．大学では，自然科学，社会科学へ結びつく学問ですから，考えるべき問題が解ける問題であるとは限らないのです．というか，ほとんどは解けない問題なのです．そんな問題を考える必要があるのか，というご意見もありそうですが，高校まででも実際はそのような問題に巡り会っているのに，無視をしてきただけです．例えば円周率 π は3.14（一時は約3という教育をされた時代もありましたね）となっていますが，正確に言えば，$3.135\leq\pi<3.145$ であると述べているだけです．本当の値はいくつなんてあまり考えることはありませんね．三角関数でも，$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ とかいくつかは知っていますが，$\sin 10^\circ$ はいくつ？，なんていう質問は高校ではなんとなくしてはいけないことみたいです．とはいうものの，三角関数表は紀元前にヒッパルコスが作っていたそうです．

2. 近似をしよう

紀元前の人間に負けているわけにはいきません．何とか求めましょう．そうは言っても，こうした値は近似でしか求められません．この近似という考え方が，大学に入りたての学生さんには理解しにくいもののようです．近似値を多項式を用いて

求めようというのがテイラー展開です．

2.1 $\sin 10^\circ$ を求めよう

三角関数のテイラー展開は，高校で習う $(\sin x)' = \cos x$ と $(\cos x)' = -\sin x$，そして平均値の定理だけで導くことができます．面倒を避けるために $x > 0$ としましょう．まず，平均値の定理より，ある $0 < c < x$ が存在して，$\sin x = x \cos c$ をみたします．$0 < \cos c \leq 1$ ですから，$\sin x \leq x$ が示せます．それを用いると，$\cos 0 = 1$ ですから

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 + \int_0^x (\cos t)'\,dt = 1 - \int_0^x \sin t\,dt \\ &\geq 1 - \int_0^x t\,dt = 1 - \frac{x^2}{2}.\end{aligned}$$

さらに，

$$\begin{aligned}\sin x &= \int_0^x \cos t\,dt \\ &\geq \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= x - \frac{x^3}{3!}.\end{aligned}$$

もっと，続けて

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \int_0^x \sin t\,dt \\ &\leq 1 - \int_0^x \left(t - \frac{t^3}{3!}\right) dt \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\end{aligned}$$

を得ます．ここまでで

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \sin x \leq x,$$
$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

が得られます．これを繰り返せば三角関数のテイラー展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

が得られるというわけです．今までの式をよく見ると，$x > 0$ で n は偶数のとき

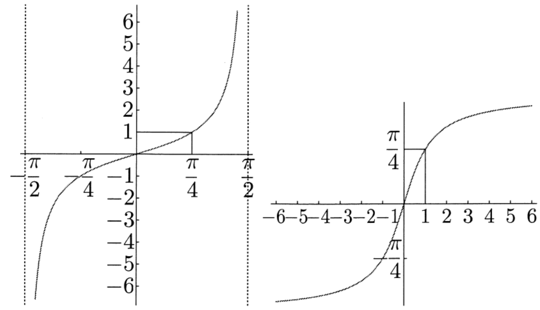


図1　$\tan x$ と $\arctan x$.

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} < \sin x < \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{1}$$

が得られています．$x \leq 0$ とか n が奇数のときにも類似の式が得られますが，煩雑になるだけなので省略します．ここで x はラジアンですから，$\sin 10^\circ$ を求めるには，$x = \frac{\pi}{18}$ を代入する必要があります．したがって，π を求めなければなりません．π を求めるには $\tan x$ の逆関数 $y = \arctan x$ を用います．高校では見かけない関数ですが恐れることはありません．$x = \tan y$ ですから，両辺を x で微分すると

$$1 = \frac{1}{\cos y^2}\frac{dy}{dx}$$

を得ます．$1 + \tan^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$ を用いると，$y' = \cos y^2 = \frac{1}{1+x^2}$，これを積分すると $\arctan 0 = 0$ より

$$y = \arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

を得ます．右辺の積分は $x = 1$ のときに，$t = \tan\theta$ とおいて置換積分の例としてみたことがあるでしょう．答えは $\frac{\pi}{4}$ でしたね．このことを後で用います．右辺の積分の中身は公比 $-t^2$ の等比級数の和の形をしているので，n を偶数とすると

$$\begin{aligned}&\arctan x \\ &= \int_0^x \left(1 - t^2 + \cdots - t^{2(n-1)} + \frac{t^{2n}}{1+t^2}\right) dt \\ &= x - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt\end{aligned}$$

となります．最後の項は困りましたが，$\frac{t^{2n}}{1+t^2} \leq t^{2n}$

が成り立ちます．これを用いると，最後の項は $x>0$ のとき

$$0<\int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2}\,dt \le \int_0^x t^{2n}\,dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

を得ます．$\tan\frac{\pi}{4}=1$，つまり，$\arctan 1=\frac{\pi}{4}$ から，$x=1$ とおいて

$$1-\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{2n-1}<\frac{\pi}{4}<1-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1} \tag{2}$$

を得ます．ここで，$n=10$ とすると，$3.04184<\pi<3.23232$ が得られます．これをさっきの三角関数の式 (1) で $n=2$ とおくと

$$x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$$

に左辺には $x=3.04184/18$，右辺には $x=3.23232/18$ を代入すると $0.168187<\sin 10^\circ<0.17861$ が得られます (本当の値は $0.173648\cdots$)．もっと計算をがんばれば，もっと精度が増すわけです．とくに，上の π の計算はマヌケな方法ですが，

$$\tan\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{239} \quad \left(ただし, \tan\alpha=\frac{1}{5}\right)$$

を用いる，つまり

$$4\arctan\frac{1}{5}-\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{239}$$

を用いると (マチンの公式)，手計算でもかなりの精度が得られます．

このようにすると，様々な近似が得られるわけですが，上と下からの評価を得ていることが重要な点であることがわかってもらえたでしょうか．しかし，上の計算でなぜ，$\frac{t^2}{1+t^2}\le t^2$ なんてのを用いたのでしょう．三角関数の計算ではあまりに自然だったので見過ごしたでしょうが，$\cos c\le 1$ を用いています．なんか深遠な理由がありそうですが，実は，理由はないのです．こうすれば，うまく計算できちゃうからですとしか，言い様がありません．中学でのユークリッド幾何で，うまい補助線を引いたら，証明がぱっとできた，というのと同じです．大学の微積分，解析では，このように巧みに不等式を使います．

2.2 e を求めよう

次に $e=2.718\cdots$ を見ていきましょう．あまりなじみがないかとは思いますが，この数は 0 と 1 に続いて，つまり π よりも大切な数と言っても過言ではありません．これはどうやって求めるのでしょう．高校の教科書には

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

と定義されています．いくつなのか，以前にそんな数があるのか，から始めなくてはなりません．

それには「有界単調数列は収束する」を前提としましょう．ごく自然な命題ですが，実数の公理に関わる命題です．今回はこれに深入りするのはやめておきます．この命題は認めてください．それでは，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が単調増加で有界なことを示しましょう．

2.2.1 単調増加

2 項定理から

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k\frac{1}{n^k}$$

が出ます．一方

$$\frac{n+1-r}{n+1}-\frac{n-r}{n}=\frac{r}{n(n+1)}>0$$

を用いると，縦の各項が左のほうが大きいので

$$\begin{aligned}&\left[{}_{n+1}\mathrm{C}_k\frac{1}{(n+1)^k}-{}_n\mathrm{C}_k\frac{1}{n^k}\right]\times k!\\ &=\frac{(n+1)}{(n+1)}\cdots\frac{(n+1-k)}{(n+1)}-\frac{n}{n}\cdots\frac{(n-k)}{n}\\ &>0.\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &=\sum_{k=0}^{n}\left({}_{n+1}\mathrm{C}_k\frac{1}{(n+1)^k}-{}_n\mathrm{C}_k\frac{1}{n^k}\right)+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\\ &>0.\end{aligned}$$

これで $(1+\frac{1}{n})^n$ が単調増加であることが示せました．

2.2.2 有界

今度は有界であることを示しましょう．

$$
{}_n\mathrm{C}_k \frac{1}{n^k} = \frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-k+1)}{n}\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}
$$

を得ます．なんで，$\frac{1}{2^{k-1}}$ にしたの？ なんて質問はなし，こうやるとうまくいくからです．これより，

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq 3.
$$

これで有界なことが出ましたので，2.2.1 節で示した単調性と合わせて，$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ は存在することがわかりました．この値を e と表すというわけです．

後のためにもう少し考察を続けましょう．途中をみると

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \frac{1}{n^k} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}
$$

を用いています．このことより，$n \to \infty$ として

$$
e \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}
$$

が出ます．一方で，

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-k+1)}{n}\frac{1}{k!}
$$

で，左辺は単調増加ですから，

$$
e \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-k+1)}{n}\frac{1}{k!}
$$

がすべての n について成り立ち，さらに，右辺の各項は正ですから，任意の N について，$n \geq N$ ならば

$$
e \geq \sum_{k=1}^{N} \frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-k+1)}{n}\frac{1}{k!}
$$

が成り立ちます．右辺の各項は $n \to \infty$ で $\frac{1}{k!}$ に収束するので

$$
e \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}
$$

が示せます．両者を合わせると

$$
e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}
$$

が示せました．和は

$$
1, 2, 2.5, 2.66667, 2.70833, 2.71667, 2.71806, 2.71825, \ldots
$$

と明らかに収束していきますが，e の値の上からの評価は 3 しかないので，どこまで，増加するのかこれだけからはわかりません．しかし，

$$
(N+k)! = N!(N+1)\cdots(N+k) \geq N! \times 1\cdot 2\cdots k = N! \times k!
$$

より

$$
\sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(N+1)!}\sum_{k=0}^{N-M}\frac{1}{k!} \leq \frac{e}{(N+1)!} < \frac{3}{(N+1)!}.
$$

ここで M をいくら大きく取っても右辺を超えることはないので

$$
\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(N+1)!}
$$

が出ます．これより

$$
\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} + \frac{3}{(N+1)!} \qquad (3)
$$

を得ます．これから，$N=5$ にとれば，$2.7167 < e < 2.7208$ を得ます．

2.2.3 e は無理数である

e を有理数 $e = \frac{p}{q}$ とする．$e < 3$ であり，かつ $3 > e > 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ であるので分母 $q > 3$，つまり，$q > e$ でなければなりません．

$$
1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q!} \leq e \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{e}{(q+1)!}.
$$

両辺に $q!$ をかけると $(1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{q!}) \times q!$ も $e \times q!$ も自然数になりますが，

$$
0 < \frac{e}{(q+1)!} \times q! = \frac{e}{q+1} < \frac{q}{q+1} < 1
$$

と矛盾します．これで，e が無理数であることがわかりました．どうですか．不等式を上手に使っているでしょう．

3. 大学の数学の鬼門，ε–δ 法

- 数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとは，

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists n_0 \quad n\geq n_0 \Rightarrow |a_n-a|<\varepsilon$$

- 関数 f が $x=a$ で連続とは

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0$$
$$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

大学へ入学してすぐの授業で，いきなり，$\forall\varepsilon>0$ とやられたときには，数学科への進学を全く考えていなかった私には，呪文のように聞こえたものでした．これも不等式の使い方を理解すれば，そんなに難しいものではないと思います．ここでは，数列の収束だけを考えましょう．δ が出てこないから，ε–n_0 論法と読む人もいますが，どうでもいいことですね．

まず，読み方です．$|a_n-a|<\varepsilon$ を不等号をそのままに，「a_n-a の絶対値が ε より小さい」と読んでいては意味がつかめません．「a_n は a 中心，半径 ε の円の中に入っている」と読みましょう．こうすれば，全体は「まず ε を決めましょう．そうしたら，a 中心，半径 ε の円を描くと，ある番号 n_0 以降はすべてその円の中に入っている」と読めるはずです．a 中心，半径 ε のアリ地獄から抜けられなくなる番号が n_0 です．数直線，ないし平面に a_n の点をすべて描いておけば，n_0 を見つけることができるでしょう．ε はいくらでも小さく選んでよいのですから，この主張が $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ を意味していることがわかると思うのです．

次に，上の表し方の中に，等号つきと等号がついていない不等号がありますが，何か意味があるのか，考えてみてください．これがわかれば，ε–δ 法をマスターしたも同然です．

- $\varepsilon\geq 0$ としてしまうと，$\varepsilon=0$ を選んでもよいことになります．こうなると，a 中心，半径 0 の円に入る番号はないでしょう．ここは等号付きの不等号ではだめです．
- $n\geq n_0$ はどうでしょう．これは $n>n_0$ としても何の代わりもありません．n_0 は「最小」のとこれまで書いてきましたが，最小である理由はとくにありません．n_0 を選ぶ際に，円の中に入る一歩手前とでもとればいいですし，n_0 はそのままでも $n>n_0$ ならば a_n が円の中に入っているという事実は変更ありません．
- $|a_n-a|<\varepsilon$ のところは $|a_n-a|\leq\varepsilon$ とすると，円の周囲を含んだ円盤の中に入って出られなくなる番号を n_0 とすればよいことになりますが，どうでもよいことであることはわかりますね．

同様に連続性のほうについても

- $\delta=0$ しか選べないなら，$x=a$ となってしまうので，連続性を言っていることにはなりません．ここも $\delta>0$ でなくてはなりません．
- $|x-a|<\delta$ は $|x-a|\leq\delta$ でも大丈夫です．
- $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ も $|f(x)-f(a)|\leq\varepsilon$ でも大丈夫です．

これで，直感はつかめたでしょうか．前の節での近似を ε–δ 法で見直してみましょう．そうすると，ε–δ 法はコンピュータサイエンスに欠かせないものであることがわかるはずです．

π を考えましょう．数列 $a_n=(-1)^n\frac{1}{2n+1}$ とおき，$s_n=\sum_{k=0}^{n}a_n$ とおきます．前の議論から，$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{\pi}{4}$ となるはずです．式 (2) から n が偶数ならば

$$s_{n-1}<\frac{\pi}{4}<s_n$$

ですから，まず，正の ε を選んだら，

$$s_n-s_{n-1}=a_n=\frac{1}{2n+1}<\varepsilon$$

をみたすもっとも小さな n を n_0 とすれば，$n\geq n_0$ ならば，

$$\left|s_n-\frac{\pi}{4}\right|<s_n-s_{n-1}=\frac{1}{2n+1}<\varepsilon$$

をみたすことから，$\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{\pi}{4}$ が示せました．

$x>0$ について，$a_n=(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ とおき，$s_n=\sum_{k=0}^{n}a_n$ とおいて，$\lim_{n\to\infty}s_n=\sin x$

であることを示しましょう．式 (1) から，上と同様に，$a_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} < \varepsilon$ となる最小の n を n_0 とおけばよいのです．ここで，$n \to \infty$ のときに $a_n \to 0$ なのでしょうか．また，実際に n_0 を決めるにはどうしたらよいのでしょう．まず，開き直りましょう．n_0 は何も最小の n でなくても議論上は問題ないのです．$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ が ε 以下になる n_0 を見つけましょう．$[x] = m$ としましょう．つまり，$m \leq x < m+1$ です．$n > m$ として，

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdots \frac{x}{m} \frac{x}{m+1} \cdots \frac{x}{2n+1}$$

をみると，$\frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdots \frac{x}{m}$ は有限の値で計算可能ですから，この値を M と表しましょう．$k > m$ ならば $\frac{x}{k} < \frac{x}{m+1} < 1$ ですから

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \leq M \left(\frac{x}{m+1} \right)^{2n+1-m}$$

を得ます．これで $M \left(\frac{x}{m+1} \right)^{2n+1-m} < \varepsilon$ となる最小の n_0 を選べば $n \geq n_0$ で $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} < \varepsilon$ をみたします．ずいぶん緩やかな評価をしましたから，もっとずっと小さく n_0 を選んでも大丈夫なはずですがともかく議論に問題はありません．これで，$\lim_{n\to\infty} s_n = \sin x$ が示せたことになります．

純粋数学ではこれでいいのですが，コンピュータサイエンスでは問題はもっと大変です．目的の誤差を ε とおいたときに，n_0 は目的の誤差以内になるのに必要な計算回数を表しています．$\sin x$ の場合のようなルーズな評価では無駄な計算回数をしてしまい，費用がかかることになります．n_0 をできるだけ小さくすることがコンピュータサイエンスでは必要になります．

上の 2 つの級数では級数 $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ を $a_0 + \cdots + a_n$ まで求めると，誤差は a_{n+1} 以内になっていました．それは級数が交代級数，つまり，a_n の符号が交互にプラスマイナスを繰り返し，さらに $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ をみたしているからです $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ だけでは収束しないこともあります．例えば，高校の教科書にもある例ですが

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \geq \int_1^n \frac{dx}{x} = \log n$$

がすべての n について成り立つことから，左辺の級数は発散します．

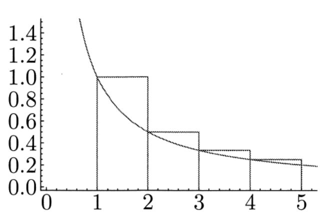


図 2　級数の発散．

e の近似では式 (3) より，$a_n = \frac{1}{n!}$，$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ とおくと，$s_n < e < s_{n+1}$ は成り立ちませんが，

$$s_n < e < s_n + \frac{3}{(n+1)!}$$

が成り立つので，$\frac{3}{(n+1)!}$ が ε より小さくなる最小の n を n_0 とすれば，$n \geq n_0$ のときには

$$|s_n - e| < \frac{3}{(n+1)!} < \varepsilon$$

をみたすことから，$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$ であることが示せました．

8 桁電卓いっぱいの精度で e を求めましょう．$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-8}$ をみたすのは $n = 10$ です．そこで，$\sum_{k=0}^{10} \frac{1}{k!}$ は電卓いっぱいの精度があるはずです．これを計算するのは

$$((\cdots((1 \div 10)+1) \div 9+1)\cdots) \div 2+1) \div 1+1$$

とすると精度があがります．電卓の中では 8 桁以降は切り捨てられてしまうので，$\frac{1}{10!}$ などがほとんど 0 になってしまい，正確な値が出なくなってしまうからです．純粋数学よりもコンピュータサイエンスのほうが細かい注意が必要なんですね．

いくつか，不等式の使い方を見てきましたが，解析学でどのように不等式が使われるかを理解していただけたでしょうか．

参考文献

1)『改訂版　数学 I』;『数学 II』;『数学 III』;『改訂版　数学 A』;『数学 B』;『数学 C』(数研出版，2011).

（もり・まこと，日本大学文理学部）

第7回 国家・学問・戦争の諸相

木村駿吉の経験(2)

アメリカ留学へ

岡本 拓司

前回より，明治期の教育や研究の実態を見るために，物理学者・技術者の木村駿吉が経験した出来事を取り上げて検討している．前回は，駿吉が，内村鑑三の不敬事件に関わって第一高等中学校（一中）の教授職から追われる経緯までを見た．今回は，この生涯最大の危機から，駿吉がどのようにして立ち上がっていったかを検討することとしたい．

7.1 大学院における研究

非職後に駿吉が置かれた環境を検討するために，時期をやや遡って，大学院・教員時代の駿吉の生活を概観してみよう．

駿吉は，明治21年（1888年）7月に帝国大学理科大学を卒業し，直ちに大学院への入学を許された．給費ではなく自費による学生生活であったために，翌月から早速，一中の嘱托となって教鞭をとり始めた．生活は豊かではなかったにせよ，困窮するということもなかったようである．明治22年（1889年）6月に『学士会月報』上で沢柳政太郎と交わした軽い論争[1)]を見ると，留学する者があるたびに行われる送別会が次第に豪奢になり，会費がかさむようになったのを憤っていたことが分かるが，欠席して貯めた会費で生理学の本を購入しており，それなりの余裕はあったものと思われる．大学院研究生の期間は2年と定められていたが，その期限となる頃の明治23年（1890年）には教諭・教授となり，明治24年（1891年）2月に非職となるまで教員生活が続く．

大学院での専攻（攷究事項）は「熱電気学」であった．明治24年9月に刊行された『帝国大学紀要理科』の第4冊に，お雇い外国人教師のノット（Cargill Gilston Knott, 1856–1922）と共著の論文[2)]が掲載されており，またその2年後には，やはり大学院時代の研究をもとにした単著の論文[3)]が，おそらくはノットの紹介によって，*Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*（エジンバラ王立協会紀要）に発表されている．駿吉の研究の概要はそれらから知ることができる．

駿吉が専攻した熱電気学とは，今日では「熱電効果」(thermoelectric effect) の名称で知られる，導体・半導体における電気と熱の関わりを研究する分野である．ノットとの共著論文には，トムソン（ケルビン卿，William Thomson, 1824–1907）によってなされた，応力がある種の金属の熱電効果に関わる性質に影響を与えるという発見を受けて，同種の測定を鉄に関してさらに精密に行った結果が記されている．こうした研究は，やはりお雇い外国人でトムソンの下で学んだユーイング（James A. Ewing, 1855–1935）など，他の物理学者によっ

ても行われていたが，ノットと駿吉は測定する温度の幅を広げて，様々な温度差に対応する起電力の変化を測定した．また，2 年後の単著論文には，各種の気体（一酸化炭素・二酸化炭素・水素）を吸収させた鉄の熱電効果に関わる測定の結果が記されており，ノットとの共著論文の時期から実験方法を改良させた旨が述べられている．水素を吸収させた場合については既にノットによって報告されていたが，駿吉もほぼ同様の結果を得ている．

どちらの論文も，ノットが従来から研究してきた既知の現象に関して，条件を変えて測定を行うという性格のものであり，目を引く新発見が報告されているわけではない．しかし，鉄線に加える力や吸収させる気体の種類を変えながら，温度と電流を読み取るという測定は，実験の条件を改良しつつ機器に慣れるためには適切であり，また新たな成果の発見も期待できるので，大学院で手がけるには格好の課題であったように思われる．2 つの論文で実験機器の多くは共通しており，特に，検流計の較正が実験ごとに行われた旨が，どちらの論文にも記されている．

ノットは，やはり自身が手がけていた磁気歪の研究を，駿吉の 1 年先輩の長岡半太郎に担当させている．長岡が研究者として初めて発表した論文も磁気歪に関するものであった．ノットの滞日中，彼の研究を大学院生 2 人が分担しながら，研究者としての経験を積んでいったことが分かる．

7.2 非職の影響

ノットと駿吉の共著論文に掲載されている測定記録によれば，この論文のための実験は明治 22 年 10 月に行われていた．一中教員としての業務と，大学院での研究の両立には困難もあったと思われるが，明治 22 年にはそれがやや容易になる事態が生じていた．帝国大学の前身の東京大学は，明治 18 年（1885 年）までに本郷に各学部が集結して一体となっていたが，一中も，明治 22 年 3 月に一ツ橋から本郷に移転していた．駿吉にとっては，いわば，職場が実験室の隣に移ってきたことになる．

明治 23 年に常勤の教諭・教授になると，しかし，教務はさらに重くなった．再び研究に専念する余裕が得られたのは，明治 24 年 2 月に非職となった後のことであったようである．

エジンバラ王立協会紀要に発表された論文には，明治 24 年に刊行されたノットとの共著論文が引用されており，また冒頭に “Read December 18, 1893” と日付が記してある．さらに，論文の最後には，実験は帝国大学の物理学科で行われたことも記されている．従って，これが書かれたのは明治 24 年から明治 26 年（1893 年）の間で，実験はこの期間かその前に行われたことになる．伊澤平八郎によれば，駿吉が後に海軍教授に就任した際に提出した履歴書には，非職となった明治 24 年 2 月から 7 月までの間，帝国大学において物理学の研究を行い，エジンバラ王立協会に発表した論文を書いたと記されているという[4]．隣の学校を非職になったのちに，帝国大学で研究に勤しんでいたことになるが，論文の存在が示すのはまさにそのような駿吉の姿である．

明治 24 年 6 月には，駿吉を指導していたノットは，滞日 8 年の間の貢献を称えた旭日章を受けて帰国するが，その後も駿吉と交流があった．この頃の物理学科の教員には，保守色の強い教育行政家として知られることになる山川健次郎や，7 月にイギリスから帰国してノットと入れ替わる形になる田中舘愛橘がいたが，彼らも，非職となったことで研究室に戻ってきた駿吉を，特に咎めることなく実験に従事させていた．

非職となっても，駿吉には研究を続ける場があり，またむしろ，非職となることで，実験に専念する余裕も得たといえる．しかし，当時，帝国大学に次ぐ位置にあった一中を追われたことの影響には負の要素も大きく，それは学位取得を含む駿吉の経歴全体に及ぶこととなった．

比較のために，駿吉の前後の物理学科卒業生の経歴を見てみよう．

駿吉が進学したのは，帝国大学発足後に規則の定められた大学院（ただし前身は東京大学時代か

ら存在する）であったが，入学後は研究生として2年在学し，さらにこの期間を含めて5年を経ると博士号を得るための学位試験を受けることができた．駿吉の1年先輩の長岡は，規定通りの段階を踏んで，明治26年1月に理学博士となり，次いで同年ドイツに留学し，明治29年（1896年）に帰国すると教授に就任した．学位取得までほぼ規定通りであるが，戦前期ではこのような順調な例は珍しく，長岡の場合には，給費学生として入学した後，明治21年には大学生の実験指導を行うようになり，同23年には助教授に就任するという，優れた能力とそれによって得られた身分・収入，そして研究環境があったことを考慮する必要がある．教授就任に相前後して日本国内での学位取得（外国で博士号を取得することは希である）と留学を済ませるというのは，戦前期の大半の帝国大学教授に共通する経歴の重ね方であるが，長岡は，結果的にこの初期の典型となった．

長岡以降，駿吉の前後の物理学科卒業生にも，学位取得・留学・帝国大学教授就任という経路を辿る者が増えていく．ただし，京都にもう一つ帝国大学が創設されるなどの変化もあり，また教職と研究の両立が困難であったこともあり，3つの出来事が実際に起こる順序は人によってやや異なる．

駿吉の4年前に東京大学を卒業し，明治19年（1886年）から第一高等中学校に勤めていた山口鋭之助は，明治30年（1897年）に同年設立の京都帝国大学の教授となり，ドイツ留学を経て明治34年（1901年）に理学博士となった．駿吉の2年後に帝国大学を卒業した水野敏之丞の場合には，第三高等中学校を経て，明治26年から第一高等中学校に勤務し，明治31年（1898年）に京都帝国大学助教授となった後，ドイツ留学を経て明治33年（1900年）に理学博士，その翌年に教授となった．水野と同期の鶴田賢次は，大学を卒業すると一中と理科大学の嘱托教員となり，明治26年に理科大学の助教授となった後に，明治32年（1899年）にドイツ・オランダに留学して教授に就任した．学位の取得はその翌年である．

高等（中）学校での勤務を続けながら学位取得に至ることは困難であり，帝国大学に移り，留学と相前後して学位取得・教授就任に至るのが無理のない経路であった．この点でも，学位取得前から帝国大学に常勤の職を得ていた長岡は有利な環境にいたといえる．ただし，山口と水野は，ドイツでレントゲン（Wilhelm Conrad Röntgen, 1845–1923）がエックス線を発見した翌年の明治29年，第一高等学校（明治27年（1894年）に高等中学校は高等学校に改称）において協力してエックス線の発生に成功し，カエルの撮影などに成功している[5)]．同じ実験は，帝国大学の山川と鶴田も行い，また第三高等学校の村岡範為馳（1853–1929）も島津製作所の協力を得て成功している．高等（中）学校であれば，教員を務めながら博士号取得に至るのは困難であるとしても，一定程度の，場合によっては帝国大学並みの研究は行うことができた．京都に2つめの帝国大学が創設される以前は，高等（中）学校，特に筆頭的存在の第一高等（中）学校は，帝国大学に次ぐ研究設備を保有していた．

山口や水野の経歴を見ると，彼らが教員であった時期の高等（中）学校は，帝国大学を卒業した新進の学者が，当時としては高度な教育や研究に従事しながら収入を得ることのできる場であり，結果的には，東京や京都の帝国大学に供給し得る人材を，教育や研究の能力を維持させながら蓄えておく場としての機能を果たしていたことがわかる．また，これは意識されたかどうか定かではないが，帝国大学の教員を採用する側も，高等（中）学校での勤務に，思想上素行上等々で問題のない者であれば，ある程度は安心して候補に含めることができたであろう．

駿吉の側からみると，一中非職は，留学・学位取得・帝国大学教授就任という，山口や水野が辿った経路から，彼が外れたことを意味した．非職後の数カ月，物理学科で実験を行うことは許されたが，安定した収入もなく研究を続けることは困難であったものと思われる．

7.3 方向転換

明治 24 年 9 月，駿吉は立教学校の教頭に就任した[6]．大学院にはその後も在籍した[7]が，立教時代には，教育熱心であったこともあり，実験を続ける余裕はなかったようである．立教学校には実験機器類もあったが，教育用であり，大学と同等の実験を行うのは困難であったであろう．

また，幾つかの経験を経て，駿吉の心境にも変化が生じていた．駿吉は西洋の物理学書を参考にした教科書類を幾つか執筆してきていたが，明治 26 年 5 月に記した翻訳書[8]の序文では，通常の訳者序文とは異なり，翻訳の意味が問われた上で，自身のものを含む日本の学術研究の今後と将来についての見解が披瀝されている．その内容はすでに板倉聖宣によって詳細に紹介されている[9]が，概要を見ておきたい．

駿吉はまず，他人の著書の翻訳は誇り得る仕事ではないが，将来の成功のためには必要であると説いている．「国家永遠の利を忘れて」潔く翻訳と称さず，西洋人の「糟粕」を盗んで自説であるかの如く見せるのは罪深いが，駿吉自身にもそのような時期があったと振り返る．日本の学術書全般を見ても，間接・直接に西洋人の説に基づきながら，内実は「泰西碩学の著書」に劣るものが多く優るものは少ない．「誤て」国家の費用で学業を修めた駿吉は，国家に貢献すべき義務は大きく，「性鈍にして学浅」くはあるが，「馬を馬とし鹿を鹿とする」ことを貴んで翻訳を行うという．

「法律則るべし科学模すべし文学倣ふべし政治拠るべし工業習ふべし」——駿吉は，我国が今日学ぶべき位置にあると知ることこそ，将来人類の進歩に貢献するための一歩であると喝破する．

さらに，事物の創造にあたっては，既に究められた領域の細部を理解するために労力を浪費すべきではなく，「全体一貫の大理」を把握するのが重要であるとも忠告する．その上で，駿吉自身がこれを実行できているわけではないが，読者と助け合い，ともに「国家の隆盛」に貢献したいと結んでいる．

西洋人の模倣をもって学術研究と称していたことの誤りを認め，今後は虚偽のない貢献をしたいと決意している様子が明らかである．また，長岡の場合には，東洋人または日本人としての西洋人への対抗意識が研究の原動力であったが，駿吉は，学術における国家への報恩を尊重するにせよ，その先に人類の進歩への貢献という大目標を掲げている．この時代に研究を志した若者たちの視野の広がりを見ることができよう．

立教学校の教頭であった駿吉には，しかし，実験を行うための機器も，長時間の測定を行う余裕もなかったものと思われる．実験のできない駿吉が，西洋人の真似ではない領域として関心を向けるようになったのは，数学色の強い理論研究であった．理論研究といっても，1890 年代前半当時の状況は，1890 年代後半のエックス線・放射能・電子の発見や，20 世紀初頭の量子論・相対性理論の登場があって以降の展開から想像されるものとは異なっていた．当時は，もはや物理学の基礎は今後は揺らがず，精密な測定のみが残された課題であるとする主張も珍しくはなく[10]，理論研究に大きな貢献が期待されていたわけでも，また理論的な課題について多様な選択肢があったわけでもなかった．駿吉が選ぶことになったのは，球面調和関数などの知識をもとに，弾性体力学や電磁気学を具体的な系に適用した際の解を求めることと，3 次元空間のベクトルの表記法である四元数（quaternion．駿吉は「四元法」と呼ぶ）を，基礎と物理学への応用の両面にわたって研究することであった[11]．

具体的な課題は異なるが，長岡も，磁気歪の実験研究のかたわら，球面調和関数を用いた，数理色の強い電磁気学分野の理論研究を手がけていた[12]．1890 年代前半に理論研究で何らかの試みを行おうとする際には，これが手ごろな課題であったのかもしれない．あるいはノットの教育の影響かとも思われる．ただし，四元数の支持者であったノットに指導を受けていても，長岡には四元数への関心はなかったようである．

7.4 アメリカ留学

明治26年8月，駿吉は以後3年間に及ぶアメリカ留学に旅立った．理論研究ならば日本でできないということはないが，留学は当時学問を志す者の多くが目標としていた．長岡が，同年3月，数理物理研究のためにドイツに官費で留学に出たことに刺激を受けたのかもしれない．

留学先がアメリカであったのは珍しい．1920年代までのアメリカの物理学界は，ヨーロッパから見れば辺境であり，例えば留学時期が駿吉と重なる長岡の場合も，ドイツからオーストリア，スイス，フランス，イギリスをめぐって帰国している．時代が下ると，ヨーロッパからアメリカ経由で帰国することも多くなるが，長岡はアメリカには寄らずに明治29年に帰国した．

駿吉がアメリカを選んだ理由は幾つか考えられる．当時，アメリカならば貧しい外国人でも働きながら勉強ができることが知られており，片山潜(1859–1933)など多くの日本人が留学していた[13]．私費留学の駿吉にとってもこれは魅力であったであろう．

また，渡米時にそこまで想定したかどうかは分からないが，駿吉にとっては日本ではもはや叶わなくなっていた博士号の取得も，アメリカでは比較的容易であった．駿吉の周辺では，一中の同僚でやはりキリスト教徒であった中島力造が，明治22年にカント哲学に関する論文を書いてイェール大学で博士号を取得していた．

1861年から博士号の授与を始めたに過ぎないアメリカは，ヨーロッパ諸国[*1]に比べてやや濫発傾向にあったとも指摘される[*2]．反面，日本からの留学生の顔ぶれを見ると，駿吉のように何らかの理由で国内での博士号取得が叶わなくなった者，私学出身者，女性，日本では充分な環境の整わない領域（神学など）を学ぶ者にとっては，高度な学問や学位に到達できるアメリカの環境は魅力であったことが分かる．

駿吉がどれほど学位を意識していたかは不明であるが，学位令制定当時（明治20年）から，帝国大学学生を中心とする若い学徒は，授与された者の名前や，彼らが授与に値するかどうかなどの話題に関心を持っていた．もちろん，一中非職によって帝大卒業生の尋常な経歴から外れた感のある駿吉にとっては，留学で明瞭な成果を得ることは格別に重要であったであろう．

さらに，アメリカは駿吉の父，芥舟が軍艦奉行として福沢諭吉を伴って訪問した地でもあり，また不敬事件後には内村も渡米を薦めていた．全般的にみて，アメリカは駿吉にとって親しみを感じやすい国であったかもしれない．

7.5 ハーヴァードで

渡米後から1年ほどの留学生活については，駿吉が田中舘に送った手紙（明治27年10月7日付）[14]が詳しく記している．

駿吉がまず滞在先に選んだのはハーヴァード大学であった[*3]．同大学の数学科には，四元数の支持者であるJ.M.パース（James Mills Peirce, 1834–1906）がおり，彼を念頭に置いて留学先を決めた可能性もあるが，むしろJ.M.パースの講義を受けて，駿吉は四元数に本格的な関心を抱くようになったようにも思われる．J.M.パースは父のベンジャミン（Benjamin Peirce, 1809–1880）と親子2代続いての数学者であったが，今日遥かに著名なのは弟で哲学者・数学者のC.S.パース（Charles Sanders Peirce, 1839–1914）であろう．駿吉は，J.M.パースの講義を聴くと同時に，四元数の入門書である「テイトの新版」[*4]を読んでいたが，物理

*1） 同時期のドイツでの日本人の博士号取得までの経験の一例は，本多静六『本多静六自伝　体験八十五年』（実業之日本社，2006年）に詳しい．

*2） やや時代が下るが，臨時教育会議（1917–1919）の議論では，アメリカの博士号の濫発傾向が江木千之によって指摘されている．

*3） 当時のハーヴァード大学の各学科については以下に概要が記されている．Samuel Eliot Morison, ed., *The Development of Harvard University* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1930).

*4） P.G. Tait, *An Elementary Treatise on Quaternions, Third Edition, Much Enlarged* (Cambridge: Cambridge University Press, 1890) のことを指す．

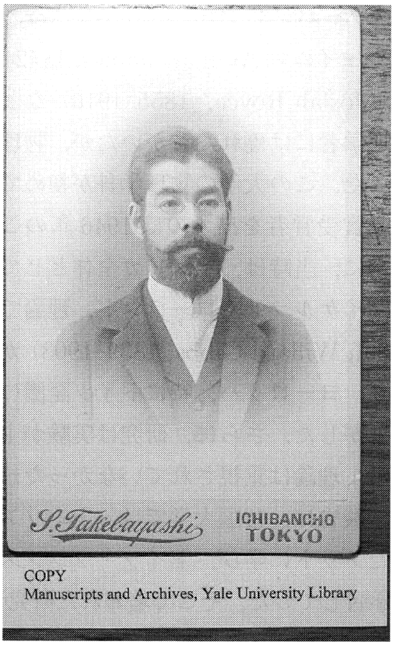


図 7.1　木村駿吉，留学から帰国の後．Images of Yale Individuals (RU 684). Manuscripts and Archives, YaleUniversity Library.

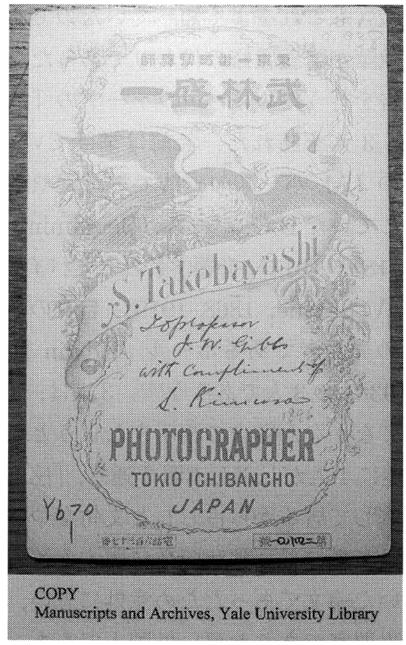


図 7.2　写真の裏．ギブスへの献辞が書かれている．Images of Yale Individuals (RU 684). Manuscripts and Archives, Yale-University Library.

学者であったテイト（Peter Guthrie Tait, 1831–1901）が，物理学上の応用に便利なベクトル法について詳述しているのを疑問視し，四元数による表記を貫こうとするパースの講義のほうが優れていると評している．

本来の専門である物理学では，熱電効果の一種であり大学院時代に研究対象としたトムソン効果に関する実験を行おうとし，著書[15]で名を知っていたトローブリッジ（John Trowbridge, 1843–1923）を訪ねている．しかし，駿吉の相談相手としては不足であったようである．トローブリッジは独習の物理学者であり，ハーヴァードの物理学科の教育上・制度上の改革には貢献したが，研究面における自身の業績は乏しい．トローブリッジの世代の物理学者たちは，大学での主務を教育とみなし，実験に従事することの教育的効果を重視していた．研究業績が教員就任の要件になるのは，彼が採用した次世代の物理学者たちの頃からである．ただし，後述するとおり，駿吉は，若手の物理学者たちにも失望している．

大学院の定めで４科目の履修を求められた駿吉は，講義は２科目とし残りは独習することを申し出て許可された．駿吉は，ノイマン（Franz Ernst Neumann, 1798–1895）の講義録を用いて，地表付近の弾性波を測定して波源を探るための計算（当時の日本の物理学者の多くが関心を抱いた地震学に関連している）や，磁場の下で回転する球などの電磁誘導に関する計算を行った．前者において対象を地球の表面付近に限定したことを，「葉志超をキメ込で」と表現しているが，これは，当時進行中の日清戦争の緒戦で，戦意に乏しく守備地から打って出ようとしなかったため，部下に突き上げられたことで有名になった清国側司令官になぞらえたもので，日清戦争での快勝を誇る時代の雰囲気が感じられる．

後者の計算では，北尾先生（北尾次郎，1853–1907）と同じような華々しいペーパーができたという．北尾はゲッチンゲン大学で博士号を取得した物理学者であり，駿吉の在学中に帝国大学理科大学教授を兼任している．北尾が書いた，数学色の強い気象学の論文は国際的にも高く評価されて

おり，駿吉もこれをよく知っていたのである．

論文執筆が講義履修の代わりであったため，駿吉は報告を行うためにハーヴァードの「数学物理の先生」3 人を訪れた．名前は挙げていないが，数学者の J.M. パースの縁戚で電磁気や剛体の力学を講じていた B.O. パース（Benjamin Osgood Peirce, 1854–1914），音響学者のセーバイン（Wallace C.W. Sabine, 1868–1919），自身の名を冠した効果の発見者であるホール（Edwin H. Hall, 1855–1938）の 3 人であろう[16]．3 人は，互いに譲り合ってなかなか駿吉の相手をしようとしなかったが，遂に 1 人がしぶしぶ眼を通し，「感応率が磁力に比例して居るから古し」と文句をつけた．

駿吉は，単に球面調和関数に関する練習問題として書いた論文であったため意外に思い，また同方面の専門家でありお雇い外国人でもあったユーイングの著作（「イウ公の本」）によって先生に指摘された点も充分承知していたため，マックスウェルなどの最新の本でも同じ扱いをしていると抗議した．さらに，第一近似としてはこの扱いでよく，また教授であれば，学生の駿吉に，進んだ方法で問題を扱うための適切な指導をすべきであると，「平生の英語下手に似ず此時は流水の如く」述べたという．ところが相手は，「小児のような申訳」をなしたので，追撃はしなかった．

それから数日の後，また同じ先生が，今度はローランド（Henry Augustus Rowland, 1848–1901）の世紀の大研究によれば，やはり駿吉の扱いは誤りであると言い立てた．ローランドはこの時期のアメリカではマイケルソン（Albert Abraham Michelson, 1852–1931）と並ぶ数少ない著名な実験家である．大仰な言い方に呆れた駿吉はこれ以上の議論は諦めたが，後に論文の第一ページを見ると，ラグランジアン微分の箇所に印がつけてあり，ここが先生にとっての難点であったことに気づいた．「ソーならソーと正直に申せバ一時間位講義して遣た者を」と駿吉はハーヴァードの程度の低さに愛想をつかしたが，教員の側も駿吉を，“wrong line of readings” をしていると報告した．

当時のハーヴァード大学は，駿吉も認めるとおり，ミュンスターバーグ（Hugo Münsterberg, 1863–1916），ジェイムズ（William James, 1842–1910），ロイス（Josiah Royce, 1855–1916）など，哲学者・心理学者には優れた者がいたが，物理学は不振であった．この大学の物理学科が初めてノーベル物理学賞受賞者を出すのは 1946 年のことである．さらに，当時は，アメリカ全体としても，実験ではマイケルソンやローランド，理論ではギブス（Josiah Willard Gibbs, 1839–1903）が居る程度であり，ヨーロッパ，特にドイツ語圏に比べれば見劣りがした．さらに，研究は実験が主体であり，数学・理論は重視されていなかった．

一方，駿吉は，帝国大学では，トムソンの学生であったノットに学び，ドイツ・フランスの物理学書も学習していた．そこで培われた研究姿勢は，独自な貢献を尊重する学問観に基づくもので，数学にも果敢に挑戦しており，球面調和関数程度の運用能力は身につけていた．駿吉の手紙はやや軽い調子のものであり，また田中舘や長岡など当時の東京大学・帝国大学卒の物理学者は一般に極めて意気軒昂であるため，若干は割り引いて考える必要もあるが，駿吉のハーヴァードの物理学者たちに対する評価は，概ね実感に基づくものであったと考えてよいように思われる．

同時期にドイツに留学していた長岡の例[17]と比べると，独（墺）・米という 2 つの留学先で，実質的に何が異なり，何が同じであったかが明らかになる．長岡もまた，自身の経験や感想を田中舘宛てに伝えており，そこにはやはり率直な観察が報告されている．

日清戦争前後の日本人留学生であるから，豊かな留学生活を送っていたわけではないが，長岡の留学生仲間は，神保小虎（1867–1924）や山極勝三郎（1863–1930）など，東京大学・帝国大学の卒業者であり，官費留学生か，私費留学でも帰国後の進路がほぼ保証されている者がほとんどであった．これに対して駿吉のアメリカでの留学生仲間には，横井時雄（1857–1927）や片山のような私学出身者が多い．留学しているので貧しいというわけではないが，片山などは文字通りの勤労学生で

ある．また，駿吉がハーヴァードで出会った物理学者たちが，ギブス以外今日ほとんど知られることがないのに対し，長岡がベルリンで出会ったのは，没する直前のヘルムホルツ（Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz，1821–1894），量子論発表前のプランク（Max Karl Ernst Ludwig Planck，1858–1947）など，一時代を画したといえる物理学者たちであり，長岡が数理物理学研究の指導を受けるにふさわしい数学の能力も持っていた．

仲間内の手紙であることもあって，教師たちへの批評が率直である点は，長岡も駿吉と同様である．長岡の留学中に没した音響学の第一人者クント（August Adolf Eduard Eberhard Kundt, 1839–1894）については，「学問は如何と思ふたれどもか様なペタゴークはよい書生を拵へること間違いなし其丈は此人の没せしに付惜むべきことだ」[18] と評している．また，著名ではあっても最晩年の「ヘル公」は講義が分かりにくく，長岡は「ボル公」（ボルツマン，Ludwig Eduard Boltzmann，1844–1906）を慕ってミュンヘンに移った．ただし，ミュンヘンでも「瓦斯論を充分講義するのは今ボル一人なるべし」と観察しており，実際には「数学抔は哀れなり伯林から来てみれバ児戯に近し」というのが実情であった．

長岡も駿吉も，虚勢もあったかもしれないが，西洋の著名な物理学者の前に萎縮する一方といった様子はない．置かれた環境によって得られたものは異なるが，今後の日本のために可能な限り良質の部分を学び取ろうとし，そのために，教師への批評は辛辣なものとなった．また，これを行い得る批評眼は，既に日本での教育によって養われていた．

駿吉が満足できる指導を受けられるようになるのは，世界的にみても高い水準にあった物理学者・数学者のギブスに出会い，ハーヴァードを離れてイェールに向ってからのことであった．田中舘宛の手紙にはイェール滞在初期の様子も記してあるが，それも含めた以後の駿吉の足取りについては，次回に論ずることとしたい．

今回も杉本恭一氏に貴重なご教示を賜った．

参考文献

1) 学士会月報，第 **16** 号（1889 年），18–28 ページ．
2) C.G. Knott and S. Kimura, "On Certain Thermo-electric Effects of Stress in Iron," *Journal of the College of Science, Imperial University, Japan*, **IV** (1891), pp.341–356.
3) S. Kimura, "On Certain Electrical Properties of Iron Occluding Gases," *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **20** (1893–94), pp.203–212.
4) 伊澤平八郎「木村駿吉のことについて」，キリスト教史学，**36** 集（1982 年 12 月），49–58 ページ．
5) 第一高等学校編『れんとげん投影写真帖』（丸善，1896 年）．
6) 伊澤，前掲[4)]，「木村駿吉のことについて」．
7) 板倉聖宣「木村駿吉とその「模倣と創造」論」，『増補版 模倣と創造　科学・教育における研究の作法』（仮説社，1987 年），77–86 ページ．
8) アルフレッド・ダニエル著，木村駿吉補訳『物理学原論』（内田老鶴圃，1892 年–1893 年）．
9) 板倉，前掲[7)]，「木村駿吉とその「模倣と創造」論」．
10) Robert H. Kargon, *The Rise of Robert Millikan* (Ithaka and London: Cornell University Press, 1982), pp.43–45.
11) 「在米理学士木村駿吉氏ノ書状」，学士会月報，第 **82** 号（1894 年），23–29 ページ．
12) 板倉聖宣・木村東作・八木江里『長岡半太郎伝』（朝日新聞社，1973 年），144–147 ページ．
13) 片山潜「自伝」，『日本人の自伝 8　片山潜・大杉栄・古田大次郎』（平凡社，1981 年），1–174 ページ．
14) 前掲[11)]，「在米理学士木村駿吉氏ノ書状」．
15) John Trowbridge, *The New Physics: A Manual of Experimental Study for High Schools and Preparatory Schools for College* (New York: D. Appleton, 1884).
16) 岡本拓司「ハーヴァード大学物理学科における理論物理学の創始」，科学技術史，**1** 号（1997 年），1–44 ページ．
17) 板倉他，前掲[12)]，『長岡半太郎伝』，162–194 ページ．
18) 「在独長岡博士の書状」，学士会月報，第 **81** 号（1894 年），30–32 ページ．

（おかもと・たくじ，東京大学大学院総合文化研究科）

特　集（2012年10月号予告）

超弦理論の数理

最先端の数学が拓く新たな自然像

本体952円

巻頭言	大栗　博司
場の理論の分解学	山崎　雅人
4次元ゲージ理論と2次元共形場理論	中島　啓
混成弦・II型弦双対性の一側面	立川　裕二
M-理論とメンブレーンの力学	細道　和夫
超弦理論が教える繰り込み群とタイムマシンの関係	中山　優
F-理論の数理	渡利　泰山
量子ダイログ関数と団代数	中西　知樹
カタラン数から弦理論のミラー対称に迫る	村瀬　元彦
［コラム］	江口　徹
［編集部一問一答］	大栗　博司

特　集（2012年8月号）

導来圏をめぐって

数学と物理の新たな世界に迫る

本体952円

導来圏の雰囲気	髙橋　篤史
速習！ 導来圏	上原　北斗
可換環論と導来圏	髙橋　亮
多元環の導来圏入門	伊山　修
導来圏と数論幾何　L 関数，Galois 表現，モチーフ	伊藤　哲史
シンプレクティック幾何と導来圏	植田　一石
導来圏とミラー対称性	梶浦　宏成
導来圏と超弦理論	戸田　幸伸
［コラム］導来圏と対称性	長尾健太郎
［コラム］導来圏の幾何学と量子コホモロジー	入谷　寛
《名著に親しむ》代数，圏の本から	川口　周
《連載》　大学院入試問題からみた大学の数学　その1	海老原　円 太田　雅人
科学と社会　その6	岡本　拓司
情報幾何の新展開　その16	甘利　俊一

編集後記

巻頭で山崎先生が述べられているようにハイゼンベルクはとても集中力のある人だったようです．また，コラムでも音楽の話がありますが，音楽等の趣味にも物理に入れ込むのと同じくらいの気概で臨んでいたのではないかと想像されます．このあたり研究者の気質なのでしょうか．

研究者の気質に焦点をあてて，調べてみるのも面白そうです．　(R)

＊　　＊

量子力学の教科書などでハイゼンベルクの偉大さは知られていますが，本特集ではあまり知られていない業績まで取り上げることができました．

何よりも本特集の魅力だと感じたところは，彼の人柄まで知ることができることだと思います．そういったところも楽しんでいただければ幸いです．　(T)

数　理　科　学　9月号

2012年9月1日発行

数理科学編集部　　発行人 木下敏孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁